

Já alguns anos, foram criadas muitas expectativas que as orientações indicadas iriam traduzir-se em melhorias significativas na aprendizagem dos alunos. Provavelmente, muitos professores terão já na altura ficado bastante cépticos quanto aos méritos das orientações fortemente normativas não estabelecidas. Outros, no entanto, terão dado o benefício da dúvida aos dirigentes do programa. Passados poucos anos, as orientações mudam substancialmente, o que era verdade ontem, deixa de o ser hoje, e a adesão dos professores ao programa torna-se ainda mais problemática. Como indica a própria autora, os professores parecem agora inclinados a acreditar que os dirigentes que lhes indicam a necessidade de nova mudança nas suas práticas tenham desta vez encontrado a solução universal para o problema de como melhorar a aprendizagem dos alunos.

Deste modo, a natureza *top-down* e muito normativa do programa, associada ao modo como este programa encara os professores, leva-me a crer que, ao contrário do que se passou com a investigação sobre os números, não houve capacidade para mobilizar de forma efectiva o muito que já hoje se sabe sobre os processos de mudança e as dinâmicas profissionais dos professores. Num programa deste tipo, não bastam bons materiais curriculares e uma boa liderança. É necessário compreender a natureza do trabalho do professor, compreender o modo como funcionam as escolas e as culturas profissionais e criar um dispositivo que forneça orientações, contenha mecanismos de avaliação e de *feedback*, mas que permita também capitalizar na criatividade e no empenho dos professores. Com isso podemos conseguir pontualmente melhores resultados num ou outro indicador, mas não teremos certamente uma melhoria sustentada nas aprendizagens dos alunos, particularmente em objectivos fundamentais como a compreensão dos conceitos matemáticos e o desenvolvimento das capacidades fundamentais de comunicação, raciocínio e resolução de problemas.

## O SENTIDO DO NÚMERO NO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA

*Joana Brocardo, Lurdes Serrazina*

O trabalho realizado no âmbito do projecto *Desenvolvendo o sentido do número: Perspectivas e exigências curriculares* (DSN) permitiu-nos reflectir sobre modos de integração curricular dos números e das operações. Neste texto começamos por traçar, em termos gerais, o modo como o tema dos números e das operações tem sido pensado em termos do currículo de Matemática indicando aspectos-chave que, em nosso entender, devem ser tomados em consideração. Depois centramo-nos em três temas habitualmente muito debatidos quando se fala do ensino e da aprendizagem dos números e das operações – os algoritmos, o cálculo numérico e os recursos – procurando discutir conceitos e clarificar o modo como eles podem ser entendidos no currículo.

### OS NÚMEROS NO CURRÍCULO E O PAPEL DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No nosso país, embora existam trabalhos de investigação que analisam questões ligadas às operações elementares, são conhecidos poucos trabalhos de investigação que analisam o modo como tem sido encarado o número no currículo. Ponte (2005), referindo o ensino da Matemática em geral, afirma que os anos 40 e 50 são marcados pela memorização e mecanização. Analisando livros escolares editados à época é clara uma preocupação com a representação e a mecanização do cálculo através do enunciado de um conjunto de regras para fazer determinado procedimento (ver *Aritmética* para todas as classes do ensino primário). Vários indicadores, como os resultados das avaliações internacionais (Ramalho, 1994, TIMSS) e das provas de aferição indicam que esta tendência para um currículo “praticado” muito virado para o conhecimento de factos e procedimentos e a obtenção de resultados certos se tem mantido.

A partir dos anos 70 começa a sentir-se a influência de Piaget e da "Matemática moderna" nos programas oficiais também do ensino primário. É recomendado um trabalho prévio de classificação de conjuntos através da correspondência termo a termo e a introdução das operações através das operações com conjuntos (MEC, 1975). No entanto, este programa continua a estar muito virado para o conhecimento dos factos e procedimentos, sendo isso claro no programa da 2ª fase (3º e 4º anos).

Em 1978 surge um projecto de desenvolvimento curricular, o Projecto "Ensinar é Investigar", que foi fortemente influenciado pelas teorias de Piaget e Bruner. Sobre este projecto Ponte, Matos e Abrantes (1998) referem: "A análise dos objectivos relativos à Matemática revela uma forte influência das tendências dominantes na época da "Matemática moderna", segundo as quais a noção de número e o sentido das operações se baseavam na estrutura dos conjuntos e das correspondências entre conjuntos" (p. 54). A resolução de problemas parece ter constituído uma das preocupações do projecto, considerado não apenas um conteúdo mas ainda um meio através do qual se constrói o conhecimento matemático (Pires, 1992).

O programa<sup>1</sup> do 1º ciclo de 1990 (DGEBS, 1990), ainda em vigor, embora afirmando ter como centro a resolução de problemas, continua, no que se refere ao número e às operações, a ser um currículo centrado no conhecimento de factos e na aquisição de técnicas rotineiras. Os tópicos são apresentados de uma forma bastante espartilhada e não se tem em conta uma sequência de aprendizagem centrada na construção de conceitos. Por exemplo, embora se dê algum relevo à contagem para a aquisição do conceito de número, ela não é relacionada com o desenvolvimento das operações. No que diz respeito à aprendizagem das tabuadas ou à introdução dos números na forma decimal, propõe-se uma abordagem que segue um caminho que aparentemente vai do mais simples para o mais complexo. De facto, preconiza-se uma aprendizagem sequencial das tabuadas – tabuada do 2, 3, 4, ... – não se tendo em conta relações básicas em que se deve apoiar a aprendizagem dos números (dobro de um número, contagens de 5 em 5, 10 em 10, ...) e nas relações entre as várias tabuadas. Quanto aos números representados na forma decimal, ignora-se um processo de construção de sentido do sistema decimal – uma décima é 10 vezes mais pequena que uma unidade, uma centésima é 10 vezes mais pequena que uma décima e 100 vezes mais pequena que uma unidade, ... – e propõe-se uma introdução sequencial dos conceitos de décima, centésima e milésima, em anos de escolaridade diferentes.

<sup>1</sup> No final de Dezembro de 2007 foi homologado um programa de Matemática para o ensino básico em que está presente uma perspectiva de sentido do número.

Em termos internacionais, a ideia de sentido do número está explícita nas Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar (1989), sendo-lhe dedicada uma das normas. No Yearbook de 1989, editado pelo NCTM, Lindquist, referindo-se aos Estados Unidos, escreve que nos últimos dez anos, tem aumentado o interesse e a prática de incluir mais do que cálculo de papel e lápis na escola elementar. Afirma ainda que os manuais aumentaram o número de problemas de palavras, estratégias de resolução de problemas e contêm sugestões de actividades de cálculo mental e com calculadora. Acrescenta que "aumentou a ênfase na construção e compreensão dos números" (p.5), embora reconhecendo que as crianças têm uma compreensão pobre da numeração e pouca compreensão sobre fracções e decimais. Também tem aumentado a ênfase no significado das quatro operações. Afirma-se que uma das maiores contribuições das Normas (NCTM, 1989), foi a de colocar o enfoque também nos conceitos das operações em vez de apenas no cálculo. Um outro aspecto referido é a ênfase posta nas diferentes formas de calcular e de fazer estimativas. A mesma autora refere um estudo onde a maioria dos professores (K-6) indicavam que uma das suas fortes preocupações era que os seus alunos realizassem cálculos correctos e rápidos, recomendando que os jovens sejam ensinados a saber fazer cálculos usando papel e lápis mas também a realizar cálculo mental ou a utilizar calculadoras ou computadores e a serem capazes de decidir o meio mais adequado em cada caso. Lindquist recomenda o desenvolvimento do sentido do número o que implica trabalhar com números grandes mas também com números pequenos nomeadamente representados na forma decimal.

Mais recentemente, Julie Anghileri (2001) comparando as práticas de trabalho em torno da temática dos números em Inglaterra e na Holanda considera que, apesar das semelhanças sociais e culturais entre os dois países, existem diferenças fundamentais relativas às abordagens de ensino, nomeadamente:

- o papel da *contagem* para desenvolver estratégias de cálculo – enquanto que em Inglaterra a contagem é vista como uma actividade de rotina e sem significado para o cálculo, na Holanda a re-invenção de estratégias mentais informais baseadas na contagem é fundamental;
- a importância do valor de posição como um princípio organizador do cálculo – em Inglaterra o valor de posição é considerado estruturante para a aquisição de métodos de cálculo mental e escrito, na Holanda é promovida uma abordagem mais holística ao número (aliando o aspecto cardinal e ordinal), com o desenvolvimento de estratégias que consideram o número como um todo. São consideradas as dezenas e as unidades, mas a ênfase não é tanto no valor de posição mas no conceito múltiplo de unidade, considerando as dezenas e as

unidades como diferentes categorias de unidades, onde a dezena pode ao mesmo tempo ser dez unidades;

- o desenvolvimento de estratégias de *cálculo mental* – considera aquela autora que o ensino de estratégias de cálculo mental é bastante recente em Inglaterra, começando a haver recomendações para estratégias como contar para a frente e para trás, uso dos “dobros e metade” e dos “quase-dobros”. Na Holanda o ensino de estratégias de cálculo mental é há muito defendido, havendo situações de contexto didácticas estabelecidas propositadamente para desenvolver determinada estratégia;
- a relevância dos *algoritmos* convencionais – é afirmado que em Inglaterra, embora seja reconhecida a importância de evitar a introdução prematura do algoritmo convencional, é exigido que seja aprendido pelo menos um algoritmo para cada operação. Na Holanda a ênfase é colocada no desenvolvimento gradual, pensado como a progressão por diferentes níveis e partindo de um informal e de um contexto adequado.

Estes quatro aspectos são centrais e o modo como eles são vistos determina opções curriculares bem diferentes. Um outro tema fundamental e associado com os números e operações é a resolução de problemas. De que modo se vê este tema no currículo? Como se equaciona a relação aprendizagem dos números e operações e a resolução de problemas?

Como foi referido anteriormente o programa em vigor em Portugal desde 1990 refere a resolução de problemas como aspecto central do currículo. Esta ideia, que não tem tido correspondência na prática diária das nossas salas de aula, nomeadamente nas do 1º ciclo, parece-nos demasiado vaga. Os problemas, abertos ou de aplicação de ideias matemáticas já trabalhadas, são basilares na aprendizagem dos números e operações. No entanto, é importante reflectir aprofundadamente sobre o modo de os escolher e de os explorar.

No projecto *Desenvolvendo o sentido do número* reflectimos bastante sobre este aspecto durante a concepção das tarefas e cadeias de tarefas. Percebemos que é muito importante ter uma ideia clara das competências que se pretendem desenvolver e reflectir de que modo um contexto pode ou não favorecer esse trabalho. Se ao nível de um primeiro ano queremos que os alunos comecem a conseguir adicionar usando saltos de 5 e de 10, é importante pensar em contextos que os convidem, naturalmente, a progredir neste sentido, abandonando a contagem 1 a 1, bem menos potente (como acontece, por exemplo com as tarefas *Comprar brinquedos*<sup>2</sup> e

<sup>2</sup> Na brochura *Desenvolvendo o sentido do número: materiais para o educador e para o professor* publicada pela APM em 2005.

*Copos de sumo*<sup>3</sup>). Se queremos que os alunos percebam a relação dobro/metade é importante pensar em contextos como o da tarefa *100 ovos*<sup>4</sup>, em que se usavam embalagens de 6 e de 12 ovos. Por outro lado, também consideramos importante ter em conta o que Fosnot e Dolk (2001) referem sobre os contextos: para além de permitirem gerar e explorar ideias matemáticas, devem igualmente possibilitar uma exploração a vários níveis. Cada aluno, com os conhecimentos que tem, deve poder resolver o problema que lhe é colocado.

Em suma, no contexto de reflexão proporcionado pelo desenvolvimento do projecto, consideramos importante que o currículo de Matemática tenha em conta esta perspectiva de pensar os números e operações em termos de sentido do número. São aspectos chave: a contagem ligada à aprendizagem das operações; as decomposições do número usando a estrutura de dobro, de 5 e de 10; a estrutura multiplicativa dos números (não apenas baseada na decomposição decimal mas incluindo também decomposições como  $80 = 4 \times 20$ ); os sentidos e estrutura das operações e as relações entre elas.

## ALGORITMO E SENTIDO DO NÚMERO

O desenvolvimento de algoritmos das diferentes operações é um aspecto marcante da história da Matemática. Na Idade Média, o início do uso dos algoritmos constituiu uma grande mudança de democratização do cálculo pois mais pessoas começaram a usar este tipo de procedimentos, relativamente aos quais era possível organizar um registo escrito. Calcular deixou de ser possível fazer apenas pelos poucos que dominavam o uso do ábaco. O cálculo, em particular o cálculo escrito, tornou-se progressivamente numa capacidade básica que a escola devia desenvolver, a par da leitura e da escrita.

A presença dos algoritmos nos programas de Matemática dos primeiros anos é uma tônica comum às orientações curriculares da grande maioria dos países. Em Portugal, no programa do 1º Ciclo que está em vigor, especifica-se que os vários algoritmos devem culminar um longo trabalho centrado na compreensão dos números e das operações e refere-se que eles são, a par da calculadora, instrumentos auxiliares de cálculo.

A tradição curricular do nosso país é ainda muito marcada pelo lugar central dado ao trabalho em torno do algoritmo (Brocardo, Serrazina e

<sup>3</sup> Na brochura *Desenvolvendo o sentido do número: materiais para o professor*, publicada pela APM em 2007.

<sup>4</sup> Na brochura *Desenvolvendo o sentido do número: materiais para o professor*, vol II, publicada pela APM em 2007.

Kraemer, 2003). No-entanto, identifica-se alguma mudança no sentido de começar a introduzir os algoritmos mais tarde<sup>5</sup> e não persistem, na maioria dos manuais, as situações algo caricatas de usar uma representação vertical para calcular, por exemplo,  $2 + 3$ .

As calculadoras, disponíveis nos mais variados locais e de fácil acesso a todos, assim como a crescente importância, no mundo de hoje, de competências de cálculo que vão muito além do uso de um algoritmo, têm originado um intenso debate sobre o valor e lugar dos algoritmos no currículo de Matemática. Deverão continuar a ser trabalhados? Porquê? Como?

### O que é um algoritmo?

Embora exista uma certa unanimidade em considerar que um algoritmo é um conjunto de procedimentos que se usam segundo uma determinada ordem, identificam-se várias concepções sobre o que é um algoritmo no âmbito das operações aritméticas elementares.

Thompson (1999) adopta uma concepção ampla de algoritmo considerando três categorias de algoritmos escritos: *standard* e formal, não *standard* e formal e não *standard* e informal. Na primeira categoria inclui os algoritmos usuais/tradicionais das operações, caracterizados por uma representação escrita vertical e por efectuarem cálculos com os dígitos.

Na segunda categoria Thompson inclui as representações verticais que traduzem procedimentos que operam sobre decomposições dos números. Por exemplo para calcular  $253 + 127$ , usa-se um algoritmo não *standard* e formal quando se opera com as decomposições dos números em centenas, dezenas e unidades representando o cálculo da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 253 \\ + 127 \\ \hline 300 \\ 70 \\ 10 \\ \hline 480 \end{array}$$

A categoria não *standard* e informal diz respeito a um vasto conjunto de procedimentos que Thompson (1999) ilustra com exemplos semelhantes aos seguintes:

<sup>5</sup> Na programa homologado em Dezembro de 2007 a introdução dos algoritmos é feita mais tarde do que o que era recomendado no programa de 1991.

$85 : 5$ (Quantos cinco há em 85?)	$123 \times 4$
$10$ cinco é $50$	$100 \times 4 = 400$
$5$ cinco é $25$	$20 \times 4 = 80$
$15$ cinco em $75$	$3 \times 4 = 12$
$15 + 2 = 17$	$400 + 80 + 12 = 492$
$85 : 5 = 17$	$123 \times 4 = 492$
$54 - 23$	$65$ é $47$
$54 - 20 = 34$	$60 + 40 = 100$
$34 - 3 = 31$	$105 + 5 = 110$
$110 + 2 = 112$	
$54 - 23 = 31$	$65 + 47 = 112$

Outros autores (ver, por exemplo, Usiskinj, 1998) adoptam uma designação genérica de algoritmos alternativos que inclui as três categorias consideradas por Thompson que não dizem respeito ao algoritmo *standard* formal.

Treffers, Noteboom e Goeij (2001) consideram uma outra forma de entender o que é um algoritmo. No conceito que apresentam e que é genericamente adoptado na *matemática realista* é também importante o conceito de cálculo em coluna. A característica essencial deste tipo de cálculo não é a representação vertical, mas sim o facto de se usar a decomposição decimal (*splitting*), de se operar usando o valor posicional dos números e de se trabalhar da esquerda para a direita. No algoritmo, trabalha-se da direita para a esquerda operando sobre dígitos.

(1) Cálculo em coluna	(2) Transição do cálculo por coluna para o algoritmo	(3) Algoritmo
$253$	$253$	$253$
$+ 127$	$+ 127$	$+ 127$
$300$	$10$	$480$
$70$	$70$	
$10$	$300$	
$480$	$480$	

A transição entre (1) e (2) caracteriza-se pela mudança de ordem dos cálculos que passam a ser feitos da direita para a esquerda. A transição entre (2) e (3) é marcada por deixar de operar sobre o valor posicional dos números ( $200 + 100$ ,  $50 + 20$ ) e passar a operar sobre dígitos ( $3 + 7 = 10$ ; escreve 0 e vai 1;  $1 + 5 + 2 = 8$ ;  $2 + 1 = 3$ ).

Para estes autores o algoritmo pode ser considerado como uma extensão natural e a fase final do cálculo em coluna e do cálculo mental. O algoritmo é o resultado da transformação do cálculo mental por decomposição com números inteiros em cálculo posicional sobre dígitos.

Há vários procedimentos de cálculo mental em linha, por decomposição decimal e usando propriedades e relações numéricas. As crianças podem automatizar estes procedimentos e, nesse sentido, desenvolvem formas *standard* de calcular que não constituem necessariamente um algoritmo.

Como vimos, não há unanimidade relativamente ao conceito de algoritmo, considerado por alguns autores de um modo mais lato do que outros. No entanto, parece-nos importante perceber até que ponto integramos, nesse conceito, características que caracterizam globalmente o que é um algoritmo em matemática, onde é marcante o facto de se tratar um processo mecânico, não pensado (sempre o mesmo tipo de operação, na mesma ordem e segundo as mesmas regras). Num algoritmo segue-se um processo e não se “perde” tempo a olhar para os “entes” aos quais se vai aplicar o algoritmo.

Parece-nos igualmente importante perceber o que está por trás de cada opção e o modo como ela pode ser trabalhada e interpretada. Quando se adopta uma definição ampla de algoritmo como a de Thompson (1999), a maior parte dos processos de cálculo mental são considerados algoritmos. Às estratégias que se apoiam no cálculo em linha e no uso de propriedades e relações está a chamar-se igualmente algoritmo:

Algoritmos segundo Thompson (1999)	Estratégia de cálculo mental e ideias matemáticas associadas
<b>54 – 23</b> 54 – 20 = 34 34 – 3 = 31 54 – 23 = 31	Cálculo em linha começando pelas dezenas e depois pelas unidades
<b>136 – 27</b> 27      3 30     100 130    + 6 136    109	Para subtrair posso adicionar. Cálculo em linha, começando por aproximar à dezena mais próxima.
<b>123 x 4</b> 100 x 4 = 400 20 x 4 = 80 3 x 4 = 12 400 é 80 é 12 = 492	Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Pelo contrário, quando se opta por uma definição mais restrita, é necessário delinear o caminho de aprendizagem tendo em conta a evolução natural dos processos de cálculo mental, apoiando as transições “chave” para as propriedades e relações que apoiam a construção dos algoritmos. Neste longo processo, os alunos vão desenvolvendo o cálculo mental, ficando o uso do algoritmo reservado para os números grandes (números para os quais faz sentido eles serem usados).

### Os algoritmos no currículo

Na discussão em torno da inclusão ou não dos algoritmos no currículo são identificados vários argumentos *pró* e *contra*. Suportando este último, refere-se o efeito negativo de uma aprendizagem focada nos algoritmos que vários autores evidenciam. Por exemplo, Kamii e Dominick (1998) analisaram as resoluções de três grupos de alunos (*grupo dos não algoritmos*, que não conheciam os algoritmos, *grupo dos algoritmos* que tinham aprendido na escola os algoritmos e grupo que tinha aprendido alguns algoritmos em casa, mas não na escola). De entre as conclusões a que chegaram destacamos duas: (1) o *grupo dos não algoritmos* apresentou, na globalidade, a maior percentagem de respostas correctas e (2) os alunos do *grupo dos algoritmos* que erraram o resultado apresentaram respostas bem menos razoáveis do que as respostas incorrectas dadas pelos alunos do “grupo dos não algoritmos”.

No entanto, tal como Bass (2003) refere, conclusões como as anteriores não podem ser interpretadas como indicando que os algoritmos não devem ser incluídos no currículo, pois impedem o desenvolvimento das capacidades de cálculo. Quando trabalhados de modo adequado eles constituem uma parcela importante da capacidade de calcular fluentemente.

A relevância quase nula de, no mundo de hoje, conseguir usar um algoritmo constitui um outro argumento para não advogar o seu estudo. Nas situações simples basta usar o cálculo mental. Nas situações mais complexas e em que é necessário obter um valor exacto, todos os adultos recorrem, quase de imediato, a uma calculadora.

Em oposição à ênfase nos algoritmos identifica-se uma posição que centra as indicações curriculares na necessidade de desenvolver a capacidade de calcular de modo fluente. Deve ser dada liberdade aos alunos para inventarem as suas próprias estratégias e procedimentos e discutida a sua eficiência e nível de generalidade. De facto, todas as investigações indicam que nas turmas em que se focam e discutem várias estratégias de cálculo, vão surgindo naturalmente processos de cálculo diversificados, alguns dos quais próximos dos algoritmos tradicionais. Assim, estes são vistos como um dos meios de atingir o que é fundamental: a fluência no cálculo numérico (NCTM, 2000).

Secundando a posição de inclusão do estudo dos algoritmos no currículo identifica-se ainda o argumento da tradição – desde há muito tempo que estão no currículo – e o da importância dos algoritmos em matemática – estes são uma das características mais marcantes da Matemática.

Este debate de argumentos *pró* e *contra* a inclusão dos algoritmos nas aprendizagens iniciais dos alunos tem contribuído para clarificar o modo de equacionar o seu lugar no currículo. Os algoritmos não devem ser o foco central do currículo e devem decorrer de um longo trabalho centrado no desenvolvimento do sentido do número. É importante acompanhar a tendência natural de desenvolvimento de procedimentos de cálculo e ligar estruturalmente o desenvolvimento de métodos e de técnicas de cálculo à construção dos números, da sua estruturação e à reconstrução do nosso sistema de numeração de posição. Finalmente, é fundamental que a aprendizagem dos algoritmos possa surgir deste processo dando a possibilidade aos alunos de aperfeiçoar o seu sentido do número no contexto do cálculo algorítmico.

### CÁLCULO MENTAL

A referência explícita à importância do cálculo mental é uma constante dos currículos de Matemática. No entanto, o contexto em que hoje vivemos, marcado pela vulgarização do uso da calculadora e pela necessidade de analisar criticamente dados e de tomar decisões rápidas, acentua a sua importância e enfatiza o seu papel no que hoje se considera ser a capacidade de calcular fluentemente.

Embora presente nas indicações curriculares há mais de 70 anos e vulgarmente referido sempre que se fala em cálculo numérico, o entendimento do que é o cálculo mental nem sempre é único. Quando se calcula mentalmente pode-se escrever? Ou os cálculos têm de ser todos feitos de cabeça? Quando se usa um algoritmo “na cabeça” podemos dizer que se trata de cálculo mental?

As características do cálculo mental indicadas por Buys (2001) parecem-nos bastante esclarecedoras:

- opera-se sobre os números e não sobre os dígitos;
- usam-se relações numéricas e propriedades das operações;
- embora se calcule ‘de cabeça’, é possível recorrer a registos em papel.

Como dizem Noteboom, Boklove & Nelissen (2001). “o cálculo mental é um cálculo pensado (não mecânico) sobre representações mentais dos números. Envolve o uso de factos, de propriedades dos números ou das operações e das relações entre os números e as operações. Não é calcular na cabeça mas sim calcular com a cabeça e fazer alguns registos escritos,

se necessário. Neste sentido, não deve ser visto como oposto ao cálculo escrito” (p. 90).

Para Buys (2001) o cálculo mental assenta em três formas básicas de cálculo:

- cálculo em linha, em que os números são vistos como se estivessem colocados na recta numérica e as operações são movimentos ao longo da recta;
- cálculo recorrendo à decomposição decimal, em que se opera a partir das decomposições decimais dos números;
- cálculo mental usando estratégias variadas, em que os números são objectos que podem ser estruturados de diferentes formas e as operações podem ser efectuadas a partir da escolha de uma estrutura e de propriedades aritméticas adequadas.

Nos programas de 90 (e também nos anteriores), um aspecto que marca a presença do cálculo mental é a falta de concretização de como ele pode ser desenvolvido e trabalhado. Não há referência explícita a técnicas de cálculo nem se especificam o que se deve conseguir calcular mentalmente. Quais os tipos de cálculo que se devem conseguir fazer mentalmente? Em que anos de escolaridade?

O trabalho desenvolvido pela equipa do projecto *Desenvolvendo o sentido do número* não permite fundamentar consistentemente respostas às questões anteriores. A recolha de dados decorreu durante a implementação das cadeias de tarefas e não incidiu, em particular, no desenvolvimento do cálculo mental. No entanto, vários professores que integram a equipa do projecto passaram a dar mais atenção ao cálculo mental e a retardar a introdução dos algoritmos. A partir dos relatos que foram fazendo no seio da equipa é possível perceber o modo expedito com que os alunos usavam diferentes estratégias de cálculo e como conseguiam calcular mentalmente, sem dificuldade, com números até 100.

Pensamos que, para que os professores trabalhem de modo sistemático o cálculo mental, é importante clarificar como esse trabalho deve ser feito e o que é de esperar que os seus alunos consigam fazer. Esta é a opção seguida por países como a Inglaterra ou a Holanda. Apresentamos em seguida exemplos que ilustram as metas estabelecidas no último destes dois países, pois consideramos que elas evidenciam o foco que é colocado no cálculo mental, o modo como ele é entendido e, finalmente, o grau de exigência que lhe é conferido curricularmente.

Finalmente, um outro aspecto que está igualmente relacionado com o currículo, prende-se com indicações relativas ao modo de trabalhar as técnicas de cálculo com os alunos.

Que sugestões metodológicas poderão ser avançadas para desenvolver o cálculo mental? Existem muitas opções que podem constituir óptimos

Exemplos de três categorias de exercícios de cálculo mental		
1ª categoria Saber quase de imediato o resultado de uma operação (a partir de conhecimentos memorizados ou de <i>insight</i> obtido a partir de regras ou propriedades das operações)	2ª categoria Pensar rapidamente e com facilidade, de cabeça	3ª categoria Pensar relativamente rápido e com facilidade, de cabeça, podendo recorrer a registos intermédios
36 + 60 620 - 7 10 x 36 4500 : 9 4 x ... = 100	92 - 78 350 + 280 600 x 15 900 : 6 4 x 17 x 25	325 - 249 4 x 347 1624 : 8 16 x 25 100 000 = ... x 250

(Buys, 2001, p. 145)

caminhos para o desenvolvimento do cálculo mental. Optamos por referir as *minilessons* organizadas a partir da exploração de cadeias numéricas, usadas por elementos da equipa do projecto e que são inspiradas na reflexão de Fosnot e Dolk (2001) relativamente ao modo de desenvolver o cálculo mental.

Estes autores usam a designação *minilesson* para um espaço de aula curto, com cerca de dez ou quinze minutos, centrado no desenvolvimento de estratégias de cálculo. Para a *minilesson* o professor prepara uma cadeia numérica construída de modo a desenvolver o uso de uma determinada estratégia de cálculo. Tomando como exemplo a cadeia seguinte<sup>6</sup>, concebida com o objectivo de trabalhar a soma com dezenas ou “quase” dezenas, o professor desafia os alunos a pensar quanto é  $13 + 10$ . Dá tempo aos alunos e, quando a maioria tem o dedo levantado indicando que sabe o resultado, pergunta a um deles qual é a sua resposta. Regista no quadro o resultado, procurando que haja explicações sobre o modo de o obter. A seguir, escreve no quadro a segunda linha da cadeia –  $13 + 19$  – voltando a dar tempo aos alunos para pensarem, por si sós, na resposta. Na discussão que se segue, embora possam ser referidas várias estratégias, foca a atenção dos alunos na relação entre 10 e 19 e, portanto, no “saltar 10 e tirar 1” ao resultado de  $13 + 10$ . O mesmo se passa para o cálculo seguinte: foca a relação entre 19 e 29 e no somar 10 ao resultado do cálculo da linha anterior.

<sup>6</sup> Incluída na tarefa *Calculando em cadeia* da brochura *Desenvolvendo o sentido do número: materiais para o educador e para o professor* publicada pela APM em 2005.

13 + 10  
13 + 19  
13 + 29  
23 + 19  
23 + 31

Se em vez de ter como objectivo trabalhar a estratégia de adicionar dez (e múltiplos de 10) ou *quase* 10 (e *quase* múltiplos de 10) se quisesse focar o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para desenvolver o cálculo mental, poderia, por exemplo, propor a cadeia (Fosnot e Dolk, p. 106):

5 x 6  
30 x 6  
36 x 6  
2 x 7  
40 x 7  
42 x 7

## MATERIAIS E OUTROS RECURSOS NO CURRÍCULO

Em Portugal não existe uma forte tradição de utilização de materiais manipuláveis nas práticas lectivas dos professores, para além do quadro e giz e do manual escolar (Ponte e Serrazina, 2004). No entanto, o programa de 1975 para o ensino primário faz apelo à manipulação de objectos e os programas do início dos anos noventa recomendem a utilização de materiais, que no caso do 1º ciclo são considerados como suportes de aprendizagem.

No *Matemática 2001* (APM, 1998) a generalidade dos professores afirma usar com muita frequência o manual escolar (82%) e fichas de trabalho (58%). Relativamente ao 1º ciclo, afirmam usar materiais manipuláveis com muita frequência 12% dos professores inquiridos. Num questionário realizado em 1998, respondido por 202 professores do 1º ciclo do distrito de Lisboa (Serrazina, 1998), a maioria dos inquiridos concorda com a utilização de materiais, embora também concorde com a frase “É mau se os professores utilizam materiais por muito tempo”. A ideia que prevalece, reforçada pelos dados de um estudo realizado em profundidade com três professoras de uma escola com 26, é que os materiais servem para ilustrar conceitos. Esta ideia é reforçada pela política dessa escola que distribuíva prioritariamente os materiais pelas salas do 1º ano, pois era aí que deviam ser utilizados. No entanto, também existem casos em que parece haver um bom entendimento sobre a utilização de materiais como é o caso do professor Miguel referido no estudo de Serrazina e Loureiro (1999) que considera que os materiais permitem uma melhor compreensão

conceptual, ajudam as crianças a construir o seu raciocínio, dão suporte físico para explicar como os alunos pensam e ajudam a desenvolver a sua autonomia. Por outro lado, o estudo de Teresinha Nunes (2005) afirma que os professores fazem um excessivo uso do manual, justificando este facto pela carência de outros materiais na escola. De realçar que nenhum dos estudos mencionados se refere explicitamente à aprendizagem dos números e das operações.

Yackel (2001) refere que nos Estados Unidos, professores e educadores, concordam com a utilização de materiais, mas questiona o que isso significa, afirmando que um material, seja ele qual for, não tem valor por si mesmo, pois cada aluno traz para uma dada situação as suas experiências anteriores sendo as suas interpretações moldadas por essas experiências.

Gravemeijer (1994) distingue entre “modelo para pensar” e “modelo para trabalhar”, referindo este último como aquele que pode ser usado para chegar à resposta a um cálculo, considerando, a propósito da utilização do MAB (material multibásico), que os materiais manipuláveis muitas vezes servem como modelos de trabalho. Os alunos usam o material para chegarem à resposta mas não significa que estejam conscientes do que estão a fazer. Este autor refere Resnick e Omanson (1987) para dizer que os alunos não consideram óbvio que no cálculo com blocos ou no cálculo no papel cheguem à mesma resposta.

No actual currículo de Matemática refere-se a utilização de materiais para promover o cálculo. No entanto, trata-se de uma referência global que apenas passa a mensagem geral de que é importante usar materiais. Será que é importante precisar orientações que olhem para os materiais de um modo crítico e clarifiquem as suas potencialidades e também as suas limitações?

Beishuizen (2001) explicita o modo como na Holanda têm vindo a evoluir relativamente à avaliação crítica que fazem dos materiais. Refere, o exemplo do quadrado dos 100 (quadrado de 10 por 10, com os números de 1 a 100 colocados ordenadamente) que nos parece muito esclarecedor. Este material permite adicionar e subtrair rapidamente com números até 100:

- para calcular  $45 + 37$  os alunos procuram no quadrado o número 45, descem 3 linhas para adicionar 30 (chegando a 75) e deslocam-se 7 casas para a direita para somar 7 (chegando a 82);
- para calcular  $56 - 34$  os alunos procuram no quadrado o número 56, sobem 3 linhas para subtrair 30 (chegando a 26) e deslocam-se 4 casas para a esquerda para subtrair 4 (chegando a 22).

Os alunos podem ter compreendido bem o modo como o quadrado dos 100 pode ser usado e conseguir fundamentar/explicar os procedimentos que usam. No entanto, os resultados que obtêm a partir de adicionar e

subtrair dezenas e unidades são encontrados através da leitura do número a que chegam no quadrado e não a partir do número a que chegam na sua cabeça. Esta diferença é fundamental pois o que se pretende é que os alunos consigam adicionar ou subtrair mentalmente e não que saibam usar um conjunto de movimentos (subir uma linha, duas linhas, deslocar-se à direita 3 casas, etc.).

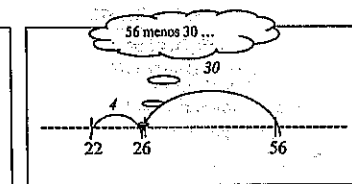
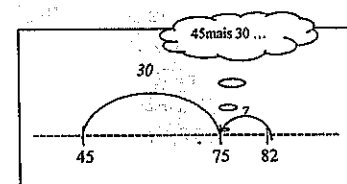
A linha numérica vazia, introduzida na Holanda nos anos noventa, não tem as limitações do quadrado dos 100 pois são os alunos que têm de determinar qual o resultado que obtêm depois de saltar.

Exemplo  $45 + 37 =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Exemplo  $56 - 34 =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



No âmbito do projecto DSN, desenvolvemos várias tarefas em que se previa o uso da linha numérica vazia. Verificámos como este modelo apoia o desenvolvimento do cálculo mental, pois estimula os alunos a operar mentalmente e permite-lhes estruturar o seu modo natural de pensar, adicionando e subtraindo em linha ao longo da recta.

Gravemeijer (1994) discutindo as potencialidades e as limitações dos materiais que habitualmente são usados no âmbito do cálculo numérico, avança a ideia de isomorfismo – as crianças devem calcular com os materiais como calculam mentalmente, sem os usar. Os materiais ajudam a ultrapassar uma dificuldade mas não substituem o raciocínio.

Adoptando a perspectiva Beishuizen (2001) e Gravemeijer (1994), é importante olhar para os recursos e interrogarmo-nos sobre o que os



alunos podem desenvolver com a sua utilização. Por exemplo, o MAB apoia o desenvolvimento dos algoritmos da adição e da subtração mas não faz sentido na fase de exploração do sentido da adição e subtração e do desenvolvimento do cálculo mental associado a estas operações.

Em suma, pensamos que é importante precisar as potencialidades de cada tipo de material, como e quando devem ser utilizados. Não se pode dizer genericamente que eles devem ser usados sempre que apropriado. É importante, sobretudo clarificar de que modo cada tipo de material apoia os alunos a ultrapassar dificuldades e contribui para estes desenvolverem um raciocínio poderoso.

### NOTA FINAL

Em oposição a recomendações gerais, a que não é fácil associar acções práticas concretas, consideramos que é importante indicar perspectivas concretas sobre o modo de trabalhar os números e as operações. Neste sentido, o currículo deverá clarificar e precisar o modo de introduzir e trabalhar os números e as operações.

É, por exemplo, fundamental explicitar quais as relações numéricas e propriedades das operações em que se apoia o cálculo mental evidenciando a diferença com as que suportam o cálculo com recurso aos algoritmos que usamos tradicionalmente. Também nos parece importante explicitar as potencialidades e limitações dos recursos que podem apoiar o trabalho em torno dos números e das operações. O ábaco é adequado, por exemplo, para perceber o algoritmo da adição, mas não é adequado para desenvolver o cálculo mental. A calculadora é um importante recurso que deve ser usado em determinadas situações. No entanto, não é adequada para efectuar cálculos elementares nem deve substituir a memorização de tabuadas e factos numéricos simples.

O currículo *implementado* é fortemente influenciado por materiais de apoio, livros de texto, recursos existentes nas escolas, etc. É também muito influenciado pela pessoa do professor, pela sua formação e pelo modo como perspectiva o seu desenvolvimento profissional. Há ainda um aspecto que relativamente à temática dos números e das operações nos parece bastante marcante no nosso país: a tradição. Pouco a pouco começa-se a re-equacionar uma tradição marcada pela aprendizagem das "contas". Está cada vez mais longe uma prática de ensino em que cada tarefa se resolve a partir da sequência: identificar os dados, indicar a operação, efectuar a operação (usando um algoritmo mesmo que se tratasse de, por exemplo  $12 \div 12$  ou  $60:2$ ) e indicar a resposta. No entanto, há ainda um grande caminho a fazer. Nesse caminho assumem um papel importante os professores que se questionam sobre o que fazem e aprendem os seus alunos e que partilham as suas experiências com outros. É anco-

rando nas orientações sobre os números e operações este currículo *implementado* por alguns professores que, aliando teoria e prática, poderemos ultrapassar os aspectos negativos da nossa tradição curricular neste tema matemático.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anghileri, J. (2001). Contrasting approaches that challenge tradition. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 4-14). Buckingham: Open University Press.
- APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino da Matemática (Relatório final)*. Lisboa: APM.
- Bass, H. (2003). Computation fluency, algorithms, and mathematical proficiency: One mathematician's perspective. In *Teaching children mathematics*, 9 (6), 322-326.
- Beishuizen, M. (2001). Different approaches to mastering mental calculation strategies. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 119-130). Buckingham: Open University Press.
- Brocardo, J., Serrazina, L. e Kraemer, JM. (2003). Algoritmos e sentido do número. In *Educação e Matemática*, 75, 11-15.
- Buys (2001). Mental arithmetic. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO)
- Carroll, William M. e Porter, Denise (1998). Alternative Algorithms for Whole-Number Operations. In Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow (Eds). *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp.106-114). 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston: NCTM.
- Dolk, M. & C. Fosnot (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division*. Portsmouth, NH: Heineman.
- Equipa do Projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares* (2005). *Desenvolvendo o sentido do número, Materiais para o educador e para o professor do 1º ciclo*. Lisboa: APM.
- Equipa do Projecto *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares* (2007). *Desenvolvendo o sentido do número, Materiais para o professor do 1º ciclo, Volume II*. Lisboa: APM.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: FI.
- Kamii, Constance e Dominick, Ann (1998). The Harmful effects of algorithms in grades 1-4. In Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow (Eds.) *The Teaching and Learning of Algorithms in School Mathematics* (pp. 130-140).

- 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston: NCTM.
- Leitão, M. L., Pires, I. V., Palhais, F. E Gallino, M. J. (1993). *Um itinerário pedagógico: Ensinar é investigar* (vol 1 – “Da criança ao aluno”). Lisboa: IIE.
- Lindquist, M. M. (1989). It's time to change. In P. R. Trafton e A. P. Shulte (Eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp. 1-13), 1989 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston: NCTM
- MEC (1975). *Programas do Ensino Primário*. Lisboa, Direcção Geral do Ensino Básico, Ministério da Educação e Cultura.
- NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar* (publicado em Inglês em 1989). Lisboa: APM e IIE.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics* (publicado em Português em 2007 pela APM). Reston: NCTM.
- Noteboom, A., Boklove, J. & Nelissen, J. (2001). Glossary part I. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp. 89-91). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO)
- Pires, M. I. V. (1992). *Processos de resolução de problemas: uma abordagem à construção do conhecimento matemático por crianças do ensino primário*. Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: implicações curriculares*. Lisboa: IIE.
- Ponte, J. P. e Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática, *Quadrante*, XIII(2), 51-74.
- Nunes, T. (2005). *Como lidam os professores do 1º ciclo com o currículo prescrito de Matemática e qual o papel mediador dos manuais nesse processo*. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa.
- Ramalho, G. (1994). *As nossas crianças e a matemática*. Lisboa: DEP/GEF, Ministério da Educação.
- Serrazina, M. L. (1998). *Teachers' Professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. Tese de doutoramento, Universidade de Londres. Lisboa: APM.
- Serrazina, L. e Loureiro, C. (1999). Primary teachers and the using of materials in problem solving in Portugal. In B. Jaworski, T. Wood e S. Dawson (eds.). *Mathematical teacher education: Critical international perspectives* (pp. 49-58). Londres: Falmer.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114-145.

- Treffers, A., Noteboom, A. & Goeij, E. (2001). Column calculation and algorithms. In: M. Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Children learn mathematics* (pp. 147-172). Netherlands: Freudenthal Institute (FI) Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).
- Usiskinj, Zalman (1998). Paper-and-pencil algorithms in a calculator-and-computer age. In Margaret J. Kenney, Lorna J. Morrow, (Eds.) *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 7-20). 1998 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, Reston: NCTM.
- Yackel, E. (2001). Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of América. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practices in arithmetic teaching* (pp. 15-31). Buckingham: Open University Press.