

# **PLANO DA MATEMÁTICA II**

## **NOVO PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO**

4.<sup>a</sup> Reunião de Acompanhamento

**Sílvia Madeira**  
**silviomad@netcabo.pt**

# Ordem de trabalhos

1. Informações;
2. Partilha de experiências – da responsabilidade da Escola que acolhe a reunião;
3. Dinâmicas de contextos de aprendizagem: o trabalho de grupo (continuação);
4. Análise e discussão de ideias associadas ao estudo das Isometrias e simetrias:
  - 4.1. Exploração e discussão de tarefas;
  - 4.2. Simetrias em frisos e rosáceas;
5. Outros assuntos.

## Informações



GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL  
Ministério da Educação

Terminologia adoptada na classificação de itens de  
instrumentos de avaliação externa

- **Item de selecção** – o aluno/examinando escolhe a resposta a partir de várias hipóteses dadas no item. Para responder, regista os elementos que identificam a sua selecção (a forma de registar as respostas é explicitada nas instruções dadas nos enunciados das provas). São exemplos de itens de selecção os itens de:  
**escolha múltipla;**  
**associação/correspondência;**  
**ordenação.**

## Informações

- **Item de construção** – o aluno/examinando produz a resposta. São exemplos de itens de construção os itens de:  
**resposta curta;**  
**resposta restrita;**  
**resposta extensa.**

# Novo Programa de Matemática do Ensino Básico

página principal . organização e tratamento de dados . 3.º ciclo

## Organização e Tratamento de Dados

3.º ciclo

Propósito principal de ensino

Desenvolver nos alunos a capacidade de compreender e de produzir informação estatística bem como de a utilizar em contextos reais, e ainda desenvolver a compreensão da

## Sequências de tarefas

Organização e tratamento de dados 8º ano

(2 Nov. 2010)

[ver mais](#)

**Tarefas matemáticas**

## Brochuras e materiais

**Organização e Tratamento de Dados**

(actualizado Outubro 2010)

**Objetivos de aprendizagem**

Em relação à aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:

- desenvolver a compreensão de informação de natureza estatística e desenvolver uma atitude crítica face a esta informação;
- ser capazes de planear e realizar estudos que envolvam procedimentos estatísticos, interpretar os resultados obtidos e formular conjecturas a partir deles, usando linguagem estatística;
- desenvolver a compreensão da noção de probabilidade;
- ser capazes de resolver problemas e de comunicar em contextos estatísticos e probabilísticos.

**Continuando no trabalho de grupo**

**Dinâmicas dos contextos de  
Aprendizagem**

**O trabalho de grupo na sala de  
aula de Matemática**

# Trabalho de grupo

**Proposta de trabalho**  
**Duração: 20 minutos**

# Proposta de Trabalho

1. Analise os episódios seguintes tendo em conta:
  - a) as interacções entre os alunos;
  - b) as interacções entre os alunos e o professor.

## **Episódio 1**

- *Ilda: Stôra, já está: venha ver se está certo.*
- *Professora: O que é que vocês acham?*
- *Colegas (coro): Achamos que está bem.*
- *Professora: Estão todos de acordo?*
- *Coro: Sim.*
- *Professora: Então continuem*

- O professor é chamado para validar as descobertas ou respostas dos alunos
- O professor pode validar de forma indirecta, incentivando à continuação do trabalho ou, melhor ainda, remeter essa validação para o grupo, à custa da argumentação

## **Episódio 2**

- *Francisco: Se o denominador é 11 o período é de dois, se for 111 é de três e se for 1111 deve ser de quatro.*
- *Cláudio: Deixa isso que é muito complicado.*
- *Francisco: Stôra!*
- *(O Francisco repete a sua conjectura)*
- *Professora: Já explicaste aos teus colegas?*
- *Susana: Não.*
- *Professora: Tenta explicar-lhes primeiro, depois eu venho cá.*

- O professor incentiva à explicação de ideias dentro do grupo
- O professor dá tempo para que os alunos se apropriem das ideias e só regressa ao grupo mais tarde, podendo até nem intervir de todo

## **Episódio 3**

- *Cláudio: Ó Stôra, a gente está aqui numa discórdia. Eu digo que é dez à sexta e eles dizem que é à sétima.*
- *Professora: Já ouviram o Cláudio?*
- *Susana: Já.*
- *Professora: Já lhe explicaram porque é que pensam que é à sétima?*

- O professor é também árbitro de conflitos
- O professor não resolve imediatamente a situação mas dá aos alunos o ônus da procura de convergência, apelando à explicitação dos raciocínios

## Episódio 4

- O 1.º par de alunos a quem se dirige, queixam-se:
- A: "Isto vai ser duro de roer!"
- B: "Olha, tem duas quadráticas diferentes na mesma equação!"
- A: "Não é justo! Bem, vamos começar. Vamos factorizar  $x^2 - 9x + 20$ "
- Quando descobrem que os factores são  $x-4$  e  $x-5$ , A. diz:
- A: "Bom, acho que é isto, as respostas são 4 e 5."
- B: "Então e a outra quadrática?"

- O professor não reage aos comentários dos alunos, predisposição para a matemática
- O professor desconfia que estes alunos podem estar a dar uma resposta certa por uma razão errada, mas deixa continuar o trabalho

## Episódio 5

- P. e O. estão a mandriar, sem fazer nada.
- Prof.: "Como é que vão?"
- P: Óptimos. Já resolvemos. É 4 e 5"
- Os alunos mostram o que fizeram. Usam uma abordagem parecida à dos alunos anteriores.
- Prof. "Não acabaram de me dizer que quando  $x=4$ , (apontando para  $x^2-5x+5$ ) fica igual a 1?"
- Depois de pensarem um pouco, P. diz: "Sim, mas nós estávamos mais preocupados em que expoente fosse 0, mas se a base é 1, o expoente não precisa de ser 0."
- O: "Vamos ver se conseguimos resolver  $x^2-5x+5=1$ " E começam a factorizar ignorando que este não é para igualar a 0.

- O professor quer incentivá-los a continuar a procurar soluções.
- Decide colocar uma questão na esperança de confrontá-los com a ideia de que têm de desenvolver mais o problema
- Anota o erro muito frequente, mas não intervém

## *Episódio 6*

- Outro par de alunos brinca e olha pela janela
- Prof: "O que se passa"?
- D: "Não conseguimos resolver! Mas também, o que interessa!"
- Prof: "Não querem fazer algumas experiências?" Se for 1?"
- S: "Sim, sim"  
Quando tentam o 1, ficam surpreendidos por dar.
- D: "Olha, afinal é fácil!"
- Prof: "Existem outros valores?"

- O professor decide dar-lhes uma pista para os orientar para a resolução do problema. Espera que isso os ajude a empenharem-se.
- O professor coloca uma nova questão para incentivar os alunos a continuar

# Dificuldades dos professores no TG

- Que diz a investigação?
  - Natureza das tarefas
  - Constituição dos grupos
  - Promoção da autonomia dos alunos
  - Injustiças no trabalho de grupo
  - Ritmo de trabalho do trabalho de grupo
  - Avaliação do trabalho de grupo
  - Papel global do professor

# Trabalho de grupo – Síntese

## Promoção da autonomia dos alunos

- O papel do professor é fundamental
  - A criação da autonomia dos alunos não implica uma atitude demissionária do professor
  - É de evitar dar respostas completas aos alunos; mais adequado é remeter questões para o grupo ou fornecer ao grupo pistas que poderão ser diferenciadas conforme as necessidades (Ep. 2)
  - A criação de **normas de funcionamento do TG** pode ajudar ao desenvolvimento da autonomia dos alunos

- Todos os grupos devem **eleger um porta-voz** que ficará responsável pela apresentação das conclusões do grupo; no entanto, **os restantes elementos do grupo podem ser questionados** sobre essas mesmas conclusões a qualquer momento para que não se afastem de responsabilidades
  - Todos os alunos devem fazer o **mínimo possível (mas aceitável) de barulho** dentro da sala para que o trabalho se possa desenvolver e não se prejudiquem uns aos outros
  - Todos os elementos do grupo devem **participar na realização da tarefa**; ninguém deve dominar e ninguém deve alhear-se do trabalho de modo a que todos contribuam para e compreendam as soluções do grupo

# Trabalho de grupo

## Injustiças no TG

- *“Uns trabalham mas outros não fazem nada!”*
  - Que mensagem passa o professor quando responde a aluno individual que o chama em vez de remeter a questão para o grupo?
  - A informação que o professor recolhe através da observação é determinante mas deixar em aberto quem é o porta-voz do grupo também ajuda na responsabilização dos alunos

# Trabalho de grupo

## Ritmo de trabalho no TG

- Quando parar o TG?
  - Esta questão também se coloca no trabalho individual
  - A exploração prévia da tarefa, pelo professor, torna-o mais apto para decidir sobre este timing porque sabe o que é essencial e o que é acessório na realização da tarefa
  - É preciso desdramatizar se nem todos os alunos chegarem ao final da tarefa...

# Trabalho de grupo

## Avaliação do TG

- *“Vão todos os elementos do grupo ficar com a mesma nota?”*
  - E depois?!
  - O trabalho de grupo é apenas uma forma possível de organização do trabalho dos alunos
  - Há outros elementos de avaliação (individual) que se devem ter em conta
    - Pode pedir-se uma síntese ou reflexão individual acerca do trabalho que foi desenvolvido em grupo

# Trabalho de grupo

## Papel global do professor

- A dinâmica de trabalho de grupo demora muito tempo a ser desenvolvida
  - É difícil e cansativo para o professor
  - Exige um nível elevado de controlo
  - Exige um nível elevado de persistência essencial à aprendizagem
- *Quando se trata de persistência, não há mais nada a portar-se mal, não há mais nada a fazer*
- A persistência resulta em perda de tempo

**A persistência é a chave do negócio**

# Trabalho de grupo: Um desafio possível

*Mas há uma coisa boa em trabalhar em grupo: nós no 7.º ano quando entrámos para ali, não sabíamos de maneira nenhuma trabalhar em grupo. Era tudo ao molho. No 8.º ano já começámos melhor a trabalhar em grupo. E é uma coisa que nos serve para toda a vida, porque geralmente quando nós arranjarmos um emprego é sempre mais trabalho em grupo, não é?*

(Mat<sub>789</sub>, Paulo, 9.º ano)

- Extracto da tese de doutoramento de Paulo Abrantes
- Extracto do livro: Abrantes, P.; Leal, L.; Teixeira, P. & Veloso, E. (1997). *Mat<sub>789</sub>, Inovação Curricular em Matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Tudella, A.; Ferreira, C.; Bernardo, C.; Pires, F.; Fonseca, H.; Segurado, I. & Varandas, J. (1999). Dinâmica de uma aula com investigações. In P. Abrantes; J. P. Ponte; H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 87-96). Lisboa: Grupo "Matemática para todos - investigações na sala de aula" (CIEFCUL) & APM.

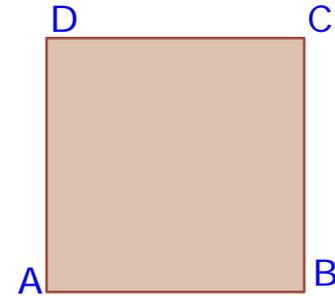
# Continuando as Simetrias

## Proposta de Trabalho

Analise as tarefas apresentadas em seguida e discuta as suas potencialidades para trabalhar aspectos referentes às simetrias em frisos e rosáceas, ao longo de cada um dos ciclos do ensino básico, tendo em conta o novo programa de Matemática. Em particular, discuta possíveis adaptações a cada um dos ciclos, objectivos visados e materiais a disponibilizar.

# Simetrias de polígonos

Que simetrias existem num quadrado?



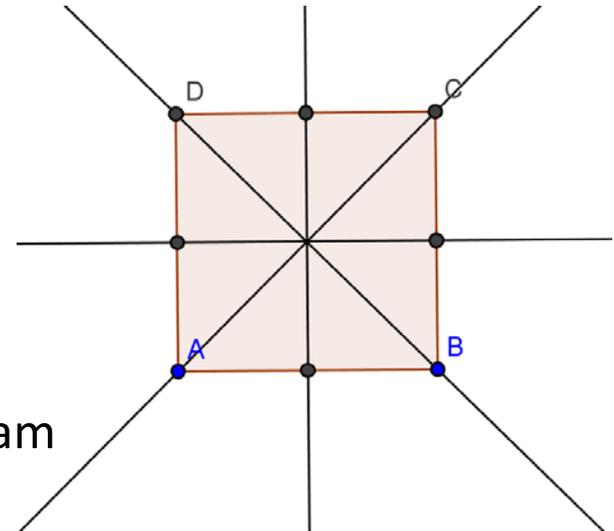
# Simetrias de polígonos

Que simetrias existem num quadrado?

- Simetrias de reflexão

4

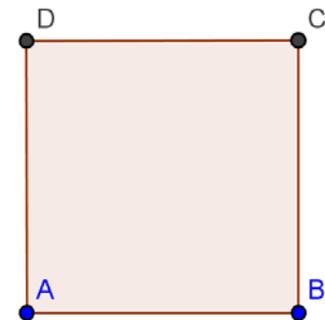
Eixos de simetria: 2 rectas que contêm as diagonais do quadrado e 2 rectas que passam pelos pontos médios de lados opostos



- Simetrias rotacionais

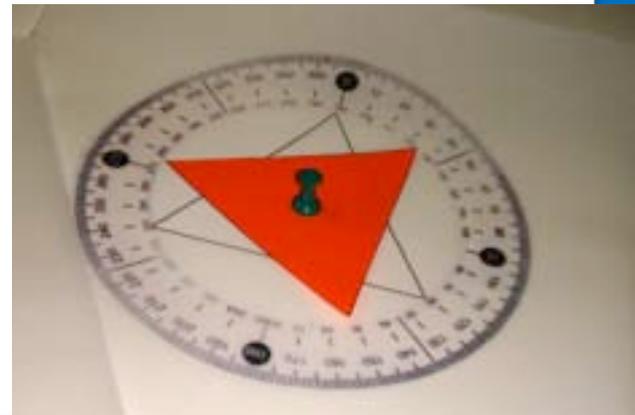
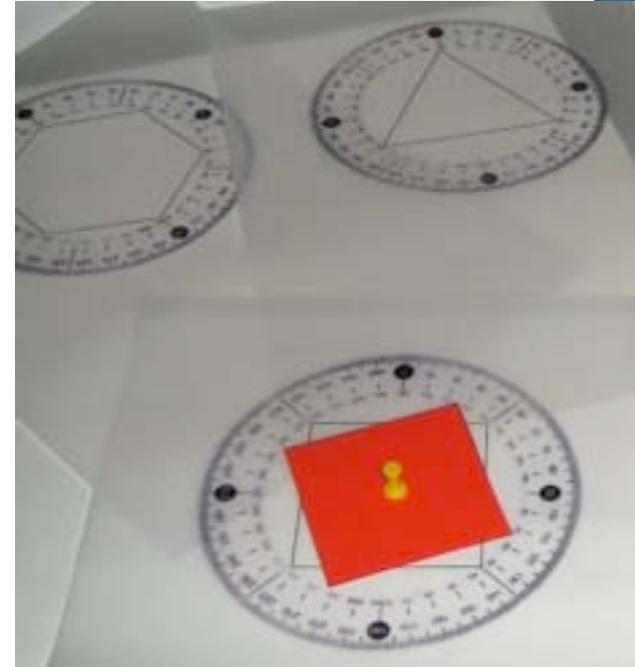
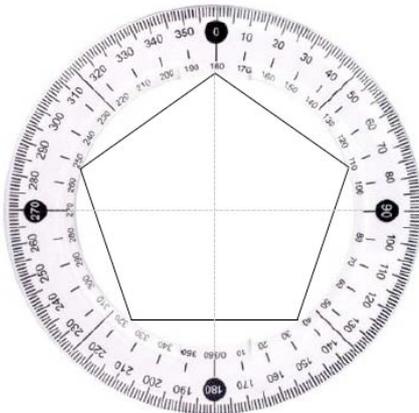
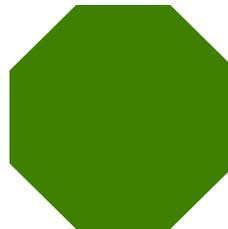
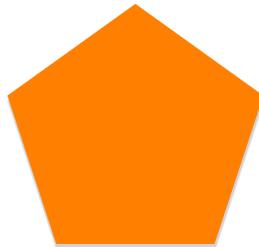
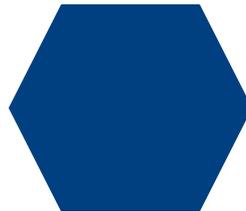
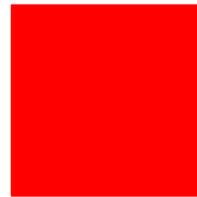
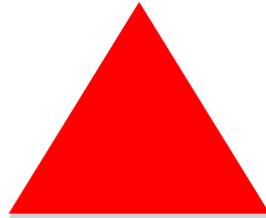
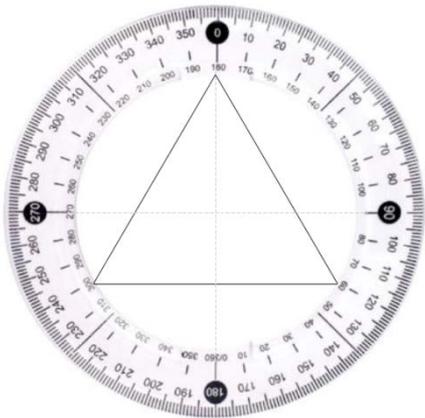
4

Com centro no ponto de encontro das diagonais do quadrado e amplitudes  $90^{\circ}$ ,  $180^{\circ}$ ,  $270^{\circ}$  e  $360^{\circ}$ .



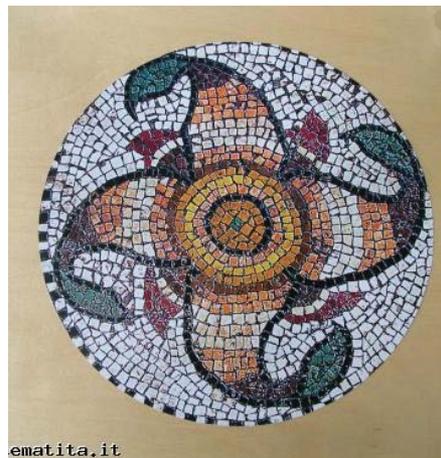
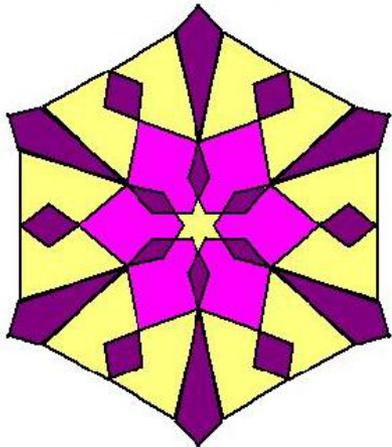
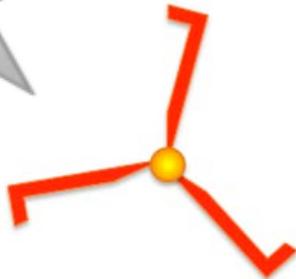
# Simetrias de polígonos

Exemplo de material de apoio à exploração de simetrias em polígonos



# Simetrias na arte decorativa: o caso das rosáceas

## Exemplos de rosáceas



ematita.it

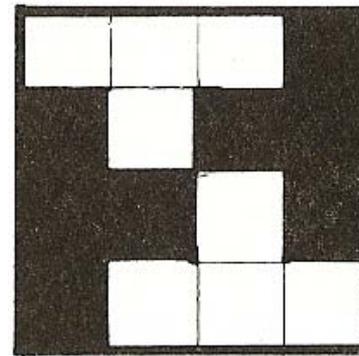
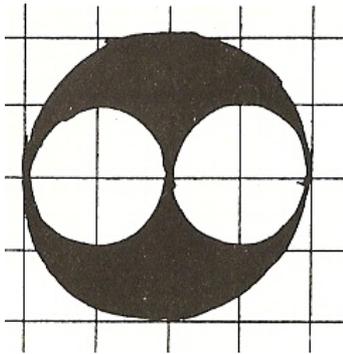
## Rosáceas

- Figuras compostas por diversos módulos geometricamente iguais que se repetem por rotação. O centro de rotação é sempre o mesmo ponto, a amplitude da rotação mínima é sempre a mesma e a divisão entre  $360^\circ$  e a medida desta amplitude é exacta.
- Existe sempre um ponto do plano que é fixo para o grupo de simetria da figura (conjunto das transformações de simetria da figura).
- Têm sempre simetrias rotacionais, podendo ter também simetrias de reflexão.

# Simetrias na arte decorativa: o caso das rosáceas

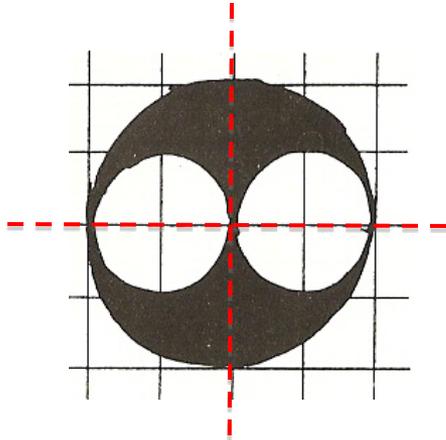
Que simetrias existem nestas rosáceas?

Identificar



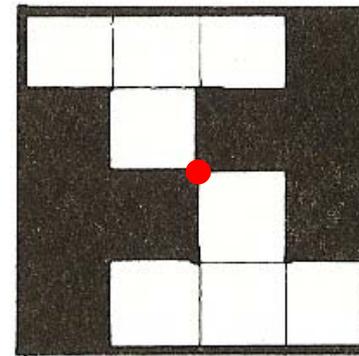
# Simetrias na arte decorativa: o caso das rosáceas

Que simetrias existem nestas rosáceas?



- Simetria de reflexão e simetria rotacional
  - Simetria de reflexão  
2 eixos de simetria – lado/lado
  - Simetria rotacional  
amplitude  $180^{\circ}$  e  $360^{\circ}$  (identidade)

Identificar



- assinala o centro de simetria (ou centro de rotação) da figura

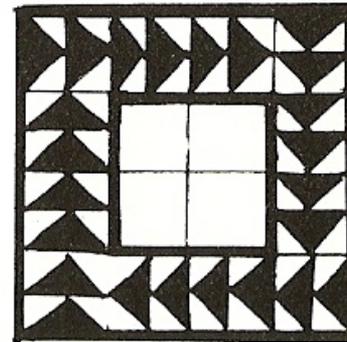
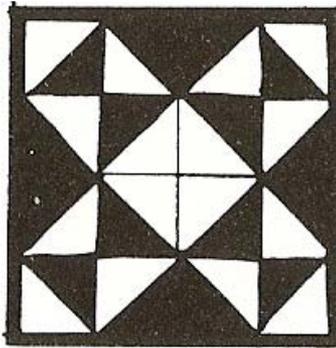
- Só simetria rotacional

amplitude  $180^{\circ}$  e  $360^{\circ}$  (identidade)

# Simetrias na arte decorativa: o caso das rosáceas

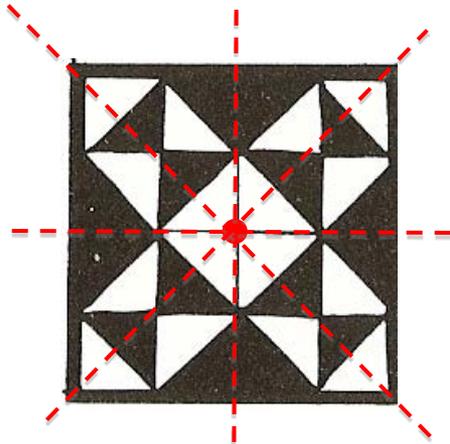
Que simetrias existem nestas rosáceas?

Identificar



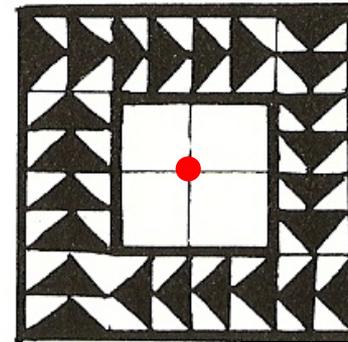
# Simetrias na arte decorativa: o caso das rosáceas

Que simetrias existem nestas rosáceas?



- Simetria de reflexão e simetria rotacional
  - Simetria de reflexão  
4 eixos de simetria - 2 lado/lado  
- 2 vértice/vértice
  - Simetria rotacional  
amplitude  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  e  $360^\circ$

Identificar



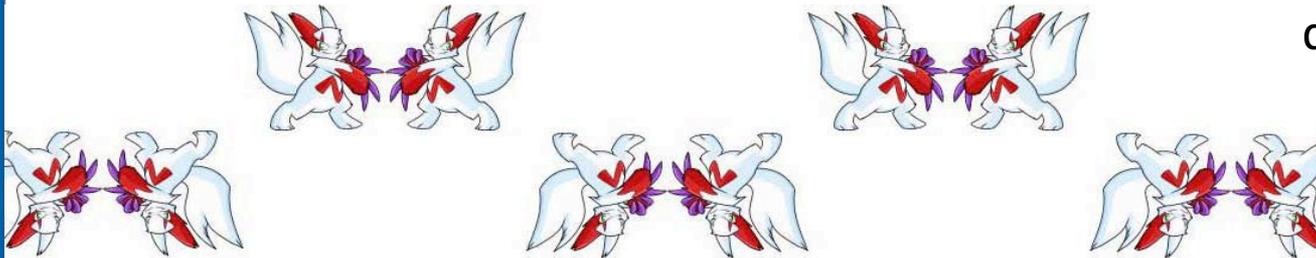
- assinala o centro de simetria (ou centro de rotação) da figura

- Só simetria rotacional

amplitude  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

## Exemplos de frisos



As barras cinzentas ou os motivos incompletos, indicam que a figura se prolonga indefinidamente para a esquerda e para a direita

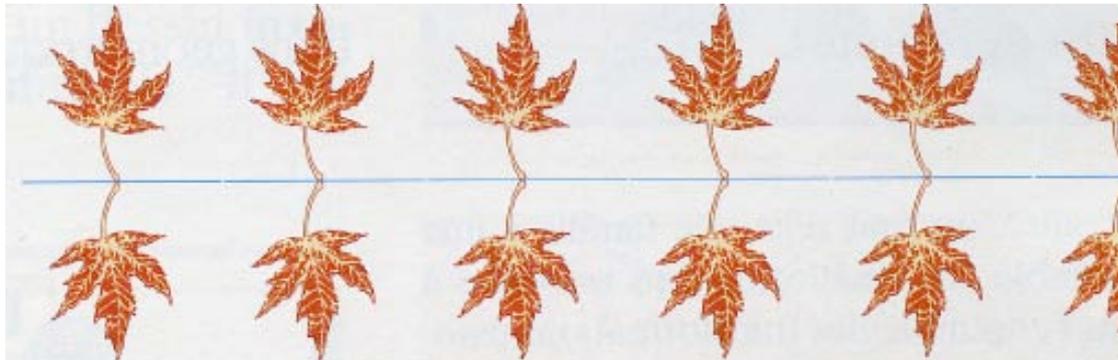
## Friso

- Figura infinita caracterizada por apresentar sempre simetrias de translação com a mesma e uma só direcção.
- No friso, o grupo de simetria fixa uma recta.
- Pode haver outras simetrias para além das de translação

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Que simetrias existem neste friso?

Identificar



**Nomenclatura  
adoptada**

*recta*

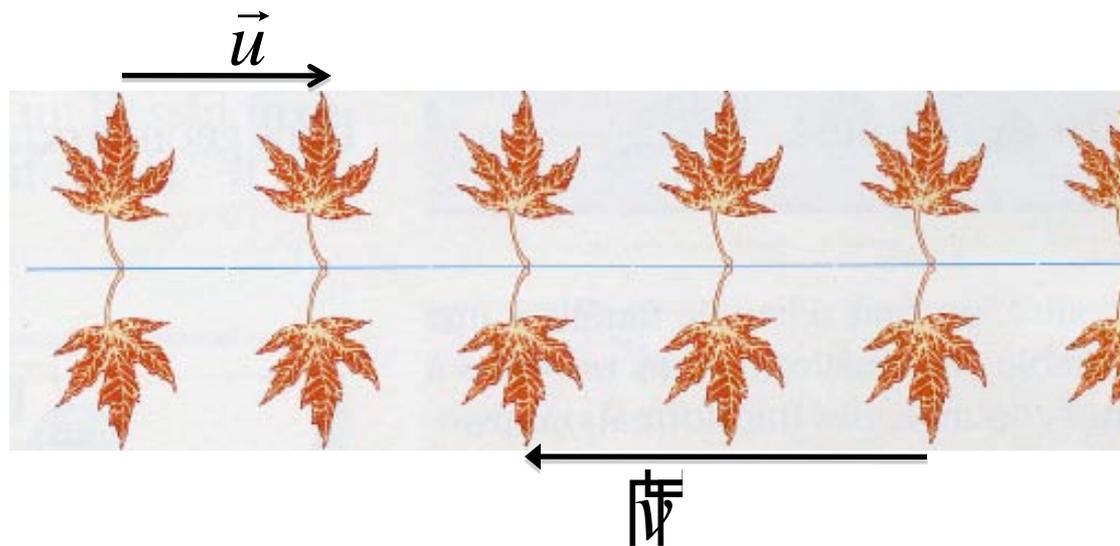
*horizontal*

*recta vertical*

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Que simetrias existem neste friso?

Identificar



**Nomenclatura  
adoptada**

*recta*

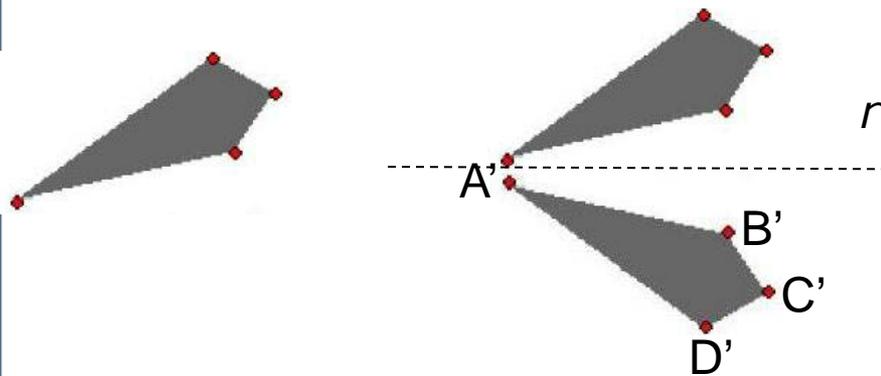
*horizontal*

*recta vertical*

- De translação. Por exemplo, translações associadas aos vectores  $\vec{u}$  e  $\sigma$
- De reflexão de eixo paralelo horizontal

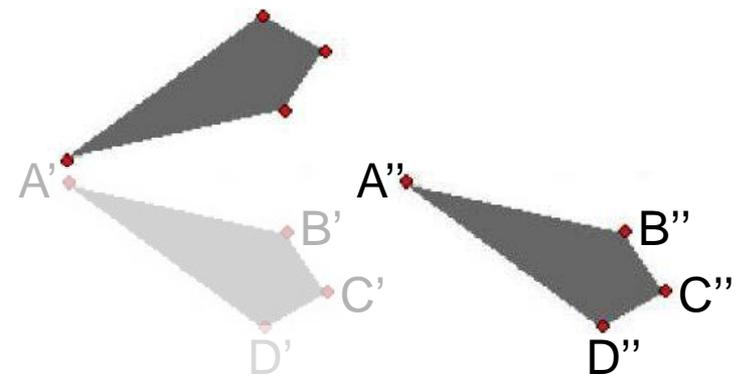
# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

A partir de um motivo simples podem-se construir frisos muito diversos usando isometrias



Motivo simples  $[A', B', C', D']$  imagem do motivo simples através de uma reflexão de eixo paralelo à recta  $r$ .

Construir



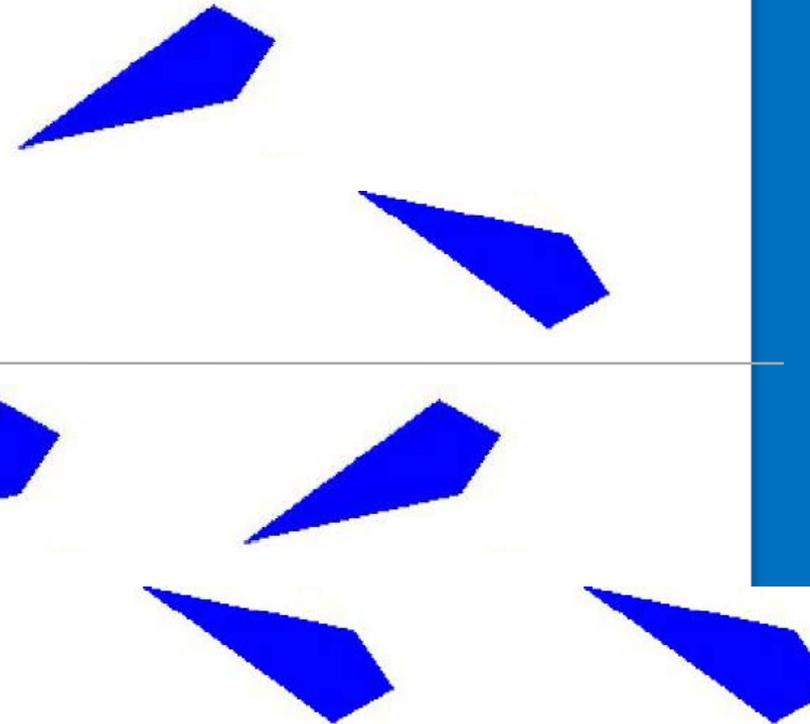
$[A'', B'', C'', D'']$  imagem de  $[A', B', C', D']$  através de uma translação de vector paralelo ao eixo de reflexão

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Construir (continuação)

Através de translações sucessivas da figura

Obtém-se o friso



Simetrias do friso: de translação e de reflexão deslizante

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Que tipos de frisos há?

Investigar

*Investigar que tipos de frisos existem (...) [é] perceber que “estruturas” de frisos existem e, para isso, devemos investigar que grupos de simetria podem ter os frisos (...) [trata-se] de procurar uma classificação dos frisos baseada nos respectivos grupos de simetria. (Veloso, 1998, p. 202)*

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

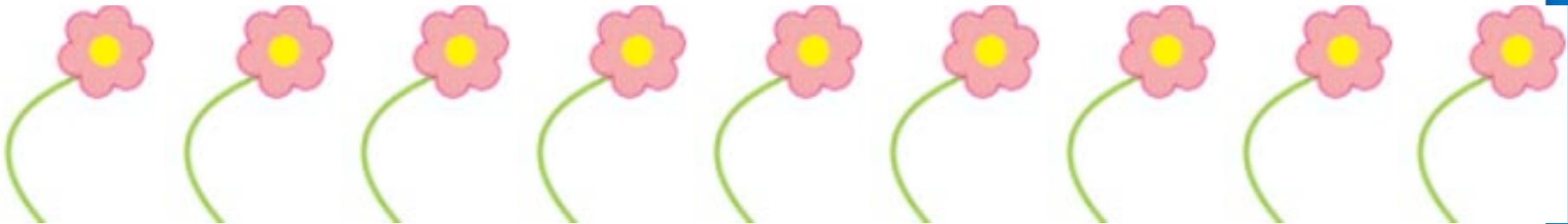
Investigar



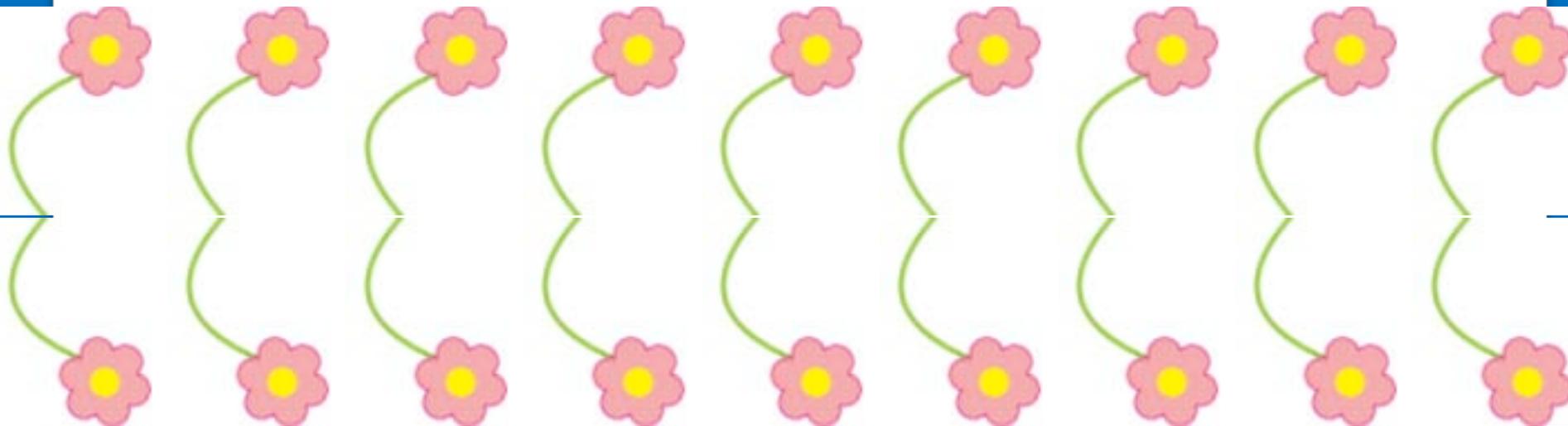
Motivo  
simples

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Investigar



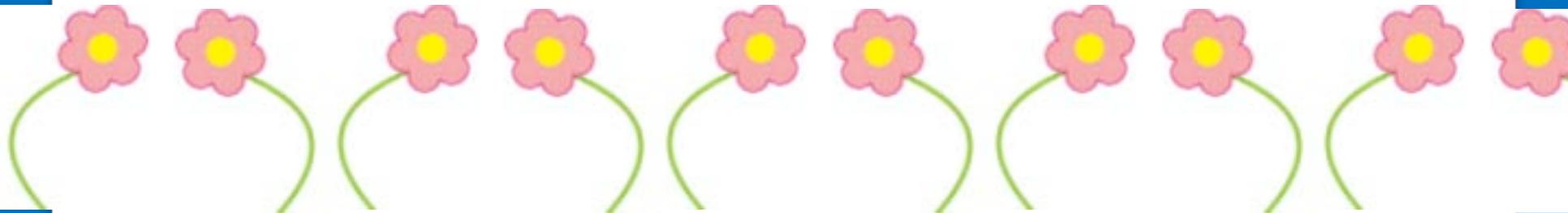
Tipo 1: gerado por translação



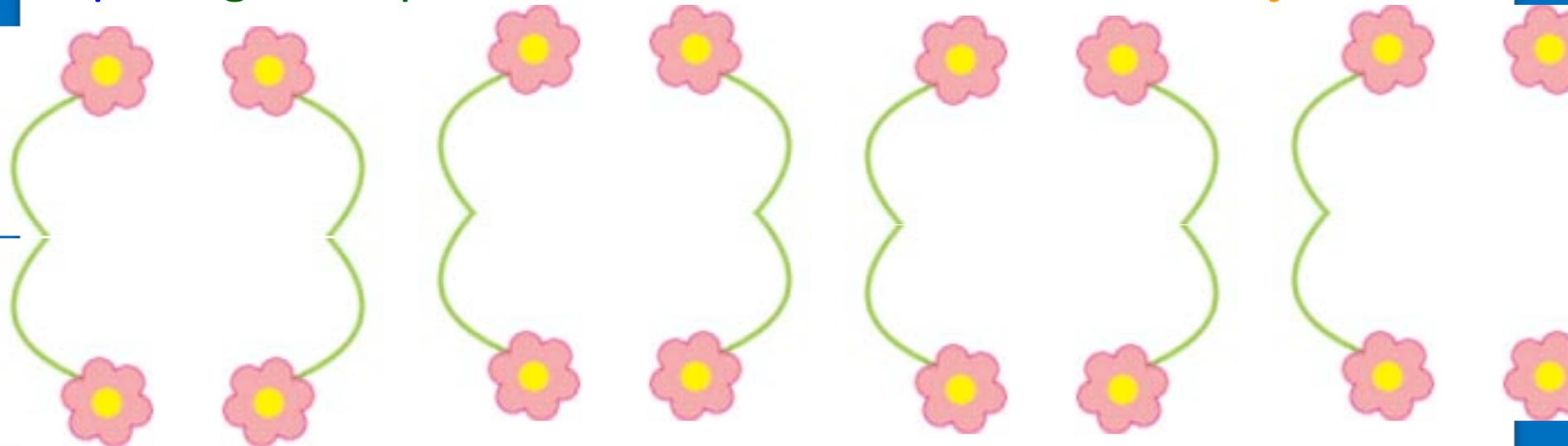
Tipo 2: gerado por reflexão de eixo horizontal e translação

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Investigar



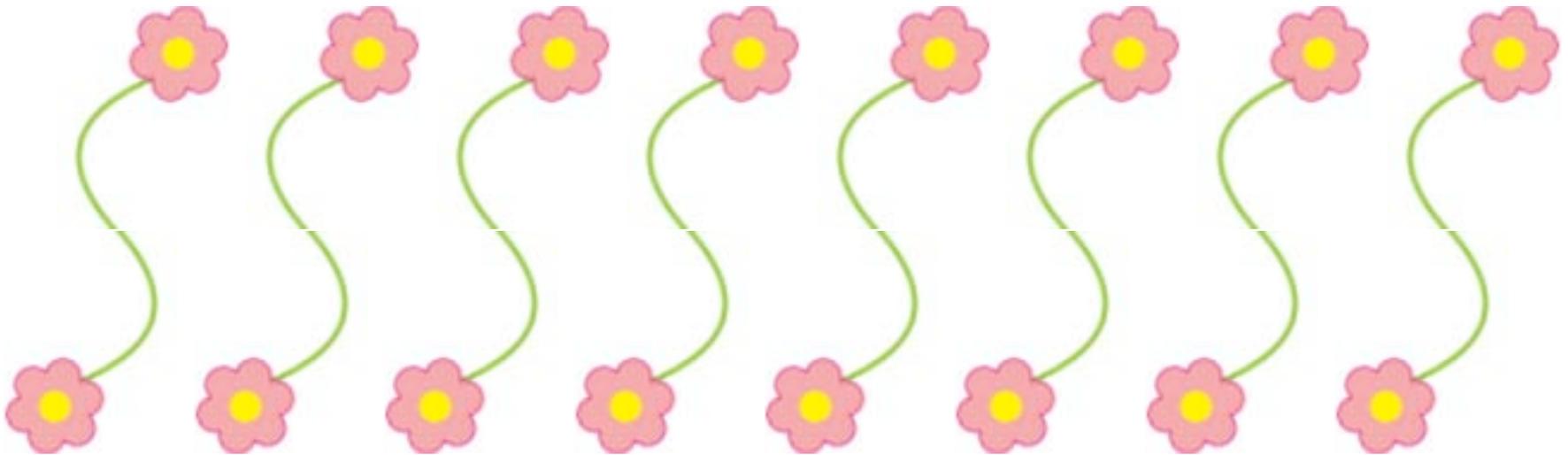
Tipo 3: gerado por reflexão de eixo vertical e translação



Tipo 4: gerado por reflexão de eixo horizontal, reflexão de eixo vertical e translação

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

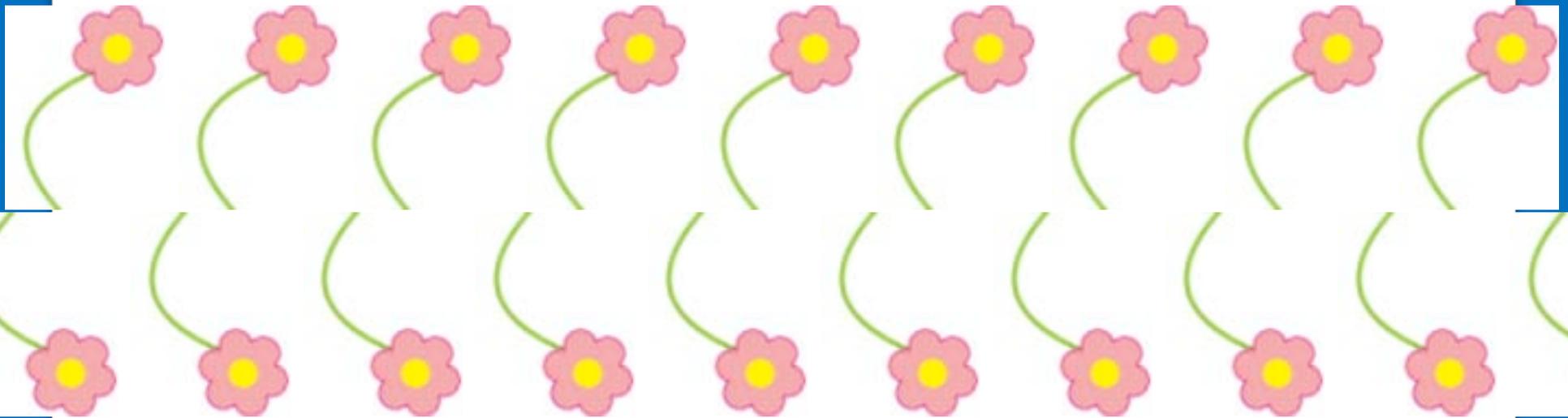
Investigar



Tipo 5: gerado por rotação de  $180^{\circ}$  e translação

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

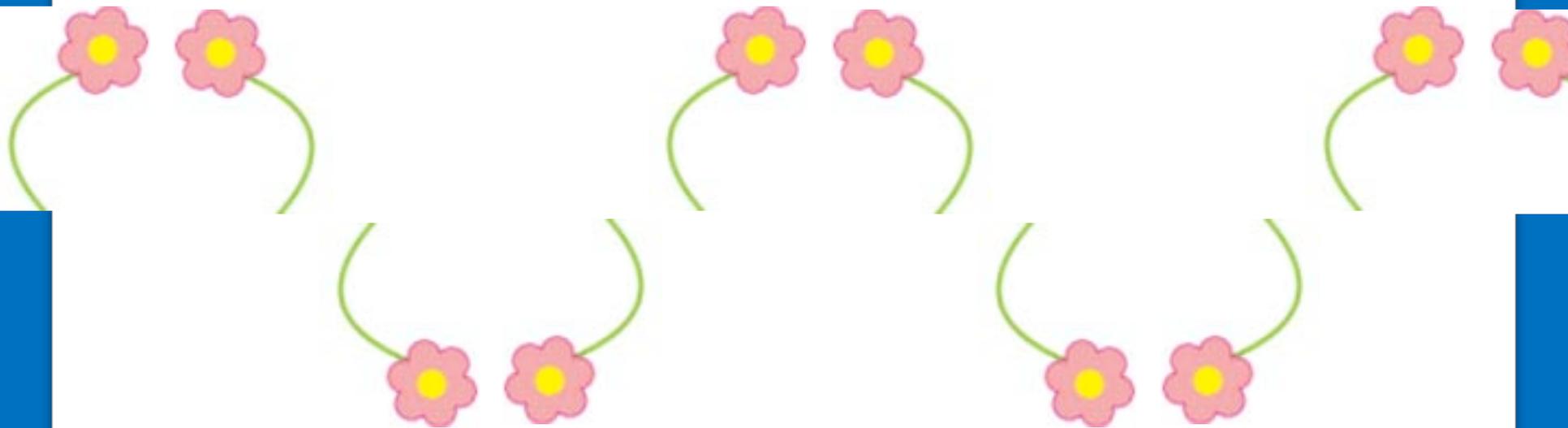
Investigar



Tipo 6: gerado por reflexão deslizando e translação

# Simetrias na arte decorativa: o caso dos frisos

Investigar



Tipo 7: gerado por reflexão de eixo vertical, reflexão deslizante e translação

Há apenas sete tipos de frisos...

# Bibliografia e outros materiais consultados

Bastos, R. (2006). Notas sobre o Ensino da Geometria do Grupo de Trabalho de Geometria da APM – Simetria. *Educação Matemática*, 88, 9-11.

Bastos, R. (2007). Notas sobre o ensino da Geometria: Transformações geométricas. *Educação e Matemática*, 94, 23-27.

Deledicq, A. & Raba, R. (1997). *Le monde des pavages*. Paris: ACL- Éditions.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Hargittai, I. & Hargittai, M. (1994). *Symmetry: A unifying concept*. Bolinas, California: Shelter Publications.

Haylock, D. (2001). *Mathematics explained for primary teachers*. London: Sage.

Musser, G., Burger, W. (1997). *Mathematics for elementary teachers: A contemporary approach* (4ª ed.). Upper Saddle River: Prentice-Hall.

Oliveira, A. (1997). *Transformações geométricas*. Lisboa: Universidade Aberta.

Serra, M. (1993). *Discovering geometry: An inductive approach*. Berkeley: Key Curriculum Press.

Veloso, E., Bastos, R. & Figueirinhas, S. (2009). Notas para o ensino da Geometria: isometrias e simetria com materiais manipuláveis. *Educação e Matemática*, 101, 23-28.

Veloso, E. (1998). *Geometria. Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

# Bibliografia e outros materiais consultados

## Documentos não publicados

Conjunto de slides elaborados por Ana Maria Boavida para o Seminário do PFCM da Universidade de Évora, em Julho de 2010

Conjunto de slides sobre *Simetrias de uma figura e isometrias no plano* elaborados por Ana Maria Boavida, Fernanda Matias, Margarida Rodrigues e Sílvia Machado para a *Formação de Professores Acompanhantes do PMEB: Geometria* promovida pela DGIDC (Setembro 2009) e respectiva adaptação pela equipa do *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos* da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal(2009/2010) .

Conjunto de slides sobre *Simetria e frisos* elaborados pela equipa do *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos* da Universidade de Évora (2008/2009).

*Transformações geométricas e simetrias de uma figura* (texto produzido pelas equipas do *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos* da ESE de Setúbal).

## Sites

[http://www.apm.pt/formacao/tgs\\_2008/index.html](http://www.apm.pt/formacao/tgs_2008/index.html)

<http://www.atm.org.uk/resources/>

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=168>

[http://mathstitch.com/Rosettes\\_Friezes\\_and\\_Wallp.html](http://mathstitch.com/Rosettes_Friezes_and_Wallp.html)

[http://projectos.es.e.ips.pt/pfcm/?page\\_id=578](http://projectos.es.e.ips.pt/pfcm/?page_id=578)