

# **PLANO DA MATEMÁTICA II**

## **NOVO PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO**

3.<sup>a</sup> Reunião de Acompanhamento

[silviomad@netcabo.pt](mailto:silviomad@netcabo.pt)

# Ordem de trabalhos

1. Informações;
2. Dinâmicas de contextos de aprendizagem: o trabalho de grupo;
3. Análise e discussão de ideias associadas ao estudo das Isometrias e simetrias:
  - 3.1. Clarificação de conceitos;
  - 3.2. Exploração e discussão de tarefas;
4. Partilha de experiências – da responsabilidade da Escola que acolhe a reunião;
5. Outros assuntos.

## Informações

<http://ludicum.org/cnjm/7/>



**JOGOS  
MATEMÁTICOS**

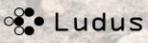
HEX

**7.º CAMPEONATO NACIONAL**  
INSTITUTO SUPERIOR de ENGENHARIA de LISBOA

**18 Março 2011**

<http://ludicum.org/cnjm/7/>  
[cnjm7@isel.pt](mailto:cnjm7@isel.pt)

design | universidade | fundação de arte moderna

 ISEL  Ludus  spm    AGENCIA NACIONAL  
PARA A CIENCIA  
E TECNOLOGIA

# **Dinâmicas dos contextos de Aprendizagem**

**O trabalho de grupo na sala de aula de Matemática**

# **Trabalho de grupo**

**Proposta de trabalho**  
**Duração: 20 minutos**

# Proposta de trabalho

1. Discuta com os seus colegas de grupo acerca das seguintes questões. Registe as respostas do seu grupo sob a forma de ideias-chave. No quadro será registada uma ideia-chave de cada grupo para cada questão.

a) Trabalho de grupo em Matemática, porquê?

b) Trabalho de grupo em Matemática, quando?

c) Que desafios se colocam aos alunos na realização de tarefas em grupo?

d) Que desafios se colocam ao professor na preparação e gestão de aulas em torno de tarefas a realizar em grupo?

# Porquê?

- Discussão
- Procedimentos conjuntos
- Partilha de idéias
- Reflexão
- 
-

# Quando?

- Promover a aprendizagem pela descoberta
- Tarefas exploratórias, de investigação, de consolidação, de maior complexidade
- Hetro correção
-

# Desafios para os alunos?

- Negociar e consensualizar
- Poder de argumentação
- Gestão de Tempo e da organização
-

# Desafios para os professores?

- Gestão de tempo
- Escolha da tarefa
- Gestão das intervenções dos alunos e do tempo
- 
-

# Dificuldades dos alunos no TG

- Falta de organização dentro do grupo
- Trabalho individual dentro do grupo
- Recurso ao professor para esclarecer dúvidas individuais
- Etc.

# Dificuldades dos professores no TG

- Que diz a investigação?
  - Natureza das tarefas
  - Constituição dos grupos
  - Promoção da autonomia dos alunos
  - Injustiças no trabalho de grupo
  - Ritmo de trabalho do trabalho de grupo
  - Avaliação do trabalho de grupo
  - Papel global do professor

# Natureza das tarefas

A escolha da tarefa a propor para TG é determinante no sucesso da mesma

- **Tarefas demasiado estruturadas** como exercícios rotineiros ou tarefas que guiam demasiado os alunos não fomentam a interacção entre os alunos nem tiram partido da interacção que exista entre eles
- Quando cada aluno é capaz, por si só, de rapidamente resolver a tarefa, não sente a necessidade de interagir com os colegas e o espírito de trabalho de grupo é completamente defraudado

# Natureza das tarefas

- No extremo oposto estão as **tarefas que exigem muita concentração por parte dos alunos** – resolver um problema bastante difícil ou escrever uma composição, por exemplo – e que, pela própria natureza, exigem, muito tempo para a sua realização; estas tarefas também não são apropriadas para trabalho em pequenos grupos

# Natureza das tarefas

- As **tarefas de investigação** na sala de aula são adequadas ao trabalho em grupo porque estimulam o diálogo, a troca de ideias, a criatividade, etc.
- Em certos casos, existe a possibilidade de os alunos fazerem, eles próprios, uma certa **subdivisão do trabalho** para que cada um contribua com o melhor que tem para dar – por exemplo, a divisão de experiências ou explorações, a divisão de representações, etc.

Tarefas práticas

A tarefa tem de ser desafiante

Actividade

A actividade tem de beneficiar da interacção e de problemas

# Constituição dos grupos

## Constituição dos grupos

### **Os grupos devem ter entre 3 e 5 alunos**

- Não deve haver muitos grupos em cada sala (máximo de 6 grupos?)
- Havendo assessoria, cada professor deve monitorizar o trabalho dos mesmos grupos durante

Se esta regra estiver acordada desde início:

- aumenta a tolerância dos que não gostam do seu grupo,
  - aumentam as trocas e interacções entre mais alunos,
- aumenta a possibilidade de os professores acertarem na constituição mais adequada dos grupos

**Continua ...**

# Isometrias e simetrias

# Simetria: De que falamos?

Serão as mãos simétricas?

Será a nossa cara simétrica?

Serão os bonecos simétricos?



Afinal, de que falamos quando falamos em simetria?

Adaptação de uma apresentação elaborada para um curso de formação em Geometria para Professores Acompanhantes promovido pela DGIDC (Setembro 2009)

# Simetria: De que falamos?

- A noção de simetria, sendo essencial em Matemática, não é exclusiva deste campo

*Simetria é uma ideia que o homem tem usado ao longo dos tempos para tentar compreender e criar ordem, beleza e perfeição.* (Serra, 1993, p. 304, cit. Weyl)

*A noção de simetria é deveras importante em Matemática, nas artes visuais e em diversas ciências como a Cristalografia e a Física.* (Oliveira, 1997, p. 70)

- Em geometria, simetria define-se em termos de isometrias

Quando a imagem de uma figura, através de uma isometria diferente da identidade, coincide com a figura original, então a figura tem simetria. (Serra, 1993)

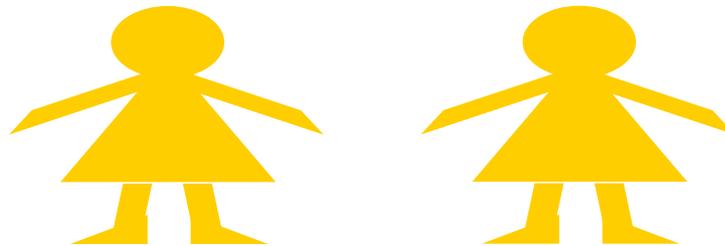
# Simetria: Estabilizando um significado

- Falar de simetria é falar de **simetria de uma figura**.

Figura: um subconjunto de pontos do plano ou do espaço. Exs: Recta, rectângulo, esfera, desenho artístico,...

(Bastos, 2006)

- Não tem sentido perguntar se as duas bonecas (duas figuras) são simétricas...



... embora possa perguntar-se se a boneca (uma figura) tem simetria.



# Simetria de uma figura: Estabilizando um significado

## Focando-nos nas figuras do plano

- Simetria de uma figura não é o mesmo que simetria axial de uma figura: a figura pode ter simetrias que não sejam axiais

*Simetria de uma figura  $F$  é uma particularidade dessa figura. Significa que existe uma isometria  $T$  do plano que deixa a figura invariante, isto é, tal que  $T(F) = F$ . (adaptado de Bastos, 2006)*

- Invariante significa globalmente invariante

*Podem alguns ou todos os pontos da figura mudar de posição, mas a figura, como um todo, fica invariante. (Veloso, 1998, p. 182)*

- Manutenção da congruência e da posição

O transformado da figura através da isometria coincide com a figura original: as figuras são geometricamente iguais e além disso ocupam a mesma posição no plano, mesmo que haja pontos que não coincidam com as suas imagens.

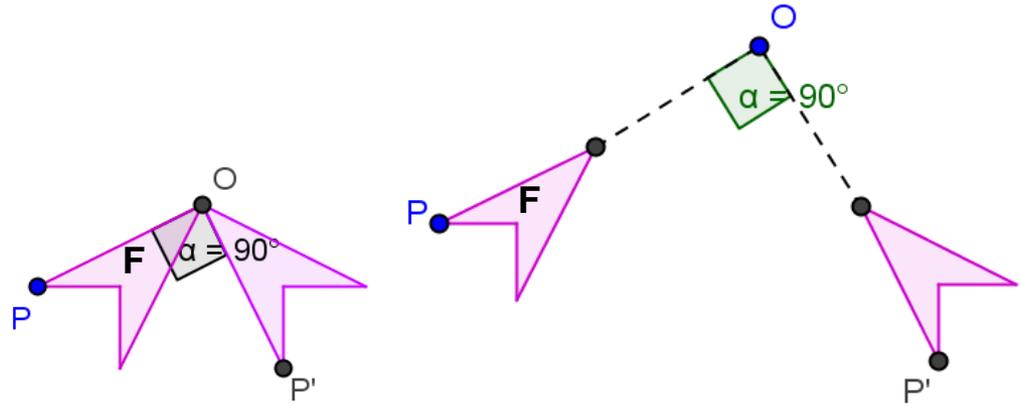
# Revisitando isometrias a propósito de simetria

- Analisar a simetria de uma figura remete para investigar se há **isometrias** (diferentes da identidade) que a deixam invariante
- Isometria: Transformação geométrica que preserva as distâncias; as figuras do plano são transformadas noutras geometricamente iguais.
- Quatro tipos fundamentais de isometrias:
  - Rotação
  - Translação
  - Reflexão
  - Reflexão deslizante

# Revisitando isometrias a propósito de simetria

Considere-se a figura F

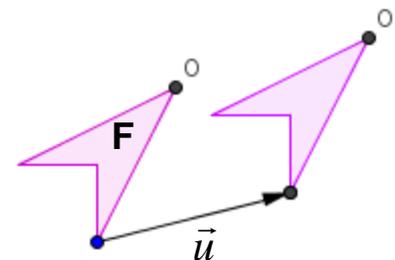
- **Rotação** de centro O e amplitude  $90^\circ$



Rotação de centro  $O$  e amplitude  $\alpha$  é uma transformação geométrica tal que: (1) qualquer que seja o ponto  $P$  do plano, a distância de  $O$  a  $P$  é igual à distância de  $O$  a  $P'$  (imagem de  $P$ ); (2) a amplitude do ângulo orientado definido por  $P, O$  e  $P'$  é igual a  $\alpha$ .

- **Translação** associada ao vector

$\vec{u}$

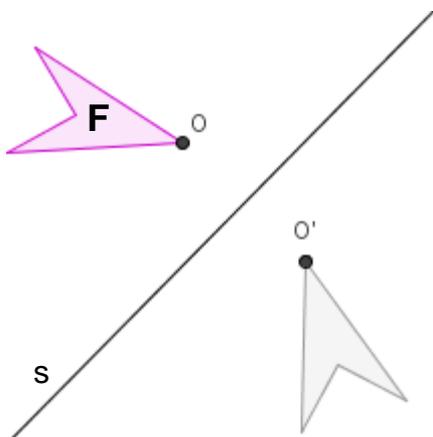


Dado um vector  $\vec{u}$  chama-se translação definida por este vector a uma transformação geométrica, tal que cada ponto  $O$  do plano é transformado num ponto  $O' = O + \vec{u}$

# Revisitando isometrias a propósito de simetria

Considere-se a figura  $F$

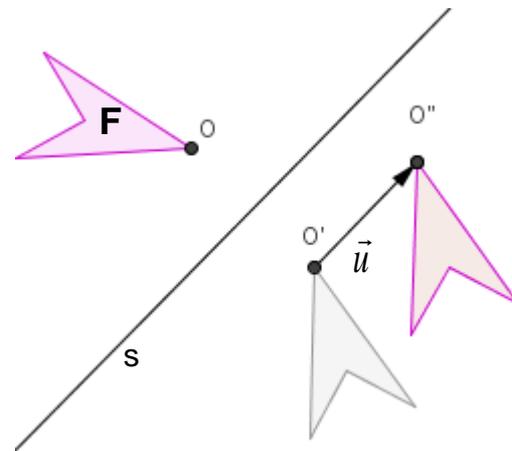
## Reflexão de eixo $s$



Reflexão de eixo  $s$  é a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto  $O$  do plano o ponto  $O'$  (imagem de  $O$ ) de tal modo que a recta  $s$  é a mediatriz do segmento  $[O O']$ ; se  $O$  pertence a  $s$ , a sua imagem coincide com  $O$ .

## Reflexão deslizante

Transformação geométrica resultante da composição de uma reflexão de eixo  $s$  com uma translação cujo vector tem direcção paralela a  $s$ .



$O''$  imagem de  $O$  através da reflexão deslizante associada a  $s$  e a  $\vec{u}$

# Retomando a ideia de simetria de uma figura

*De entre as aplicações mais interessantes das transformações e grupos de transformações estão as relacionadas com questões de simetria. Existindo muitas espécies de simetrias no plano e no espaço (...). (Oliveira, 1996, p. 187)*

*Há uma simetria para cada um dos quatro tipos de isometrias referidos. (Serra, 1993, p. 305)*

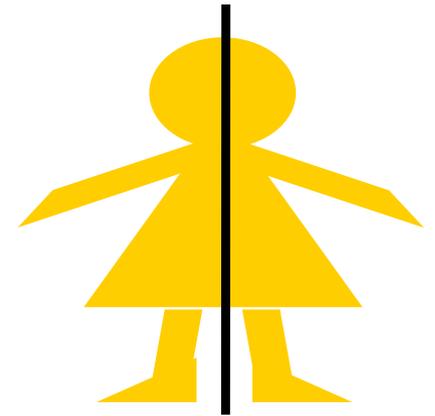
- Simetria de reflexão (ou simetria axial)
- Simetria de rotação (ou simetria rotacional)
- Simetria de translação
- Simetria de reflexão deslizante

# Simetria de reflexão de uma figura

Existe, pelo menos, uma reflexão que deixa a figura globalmente invariante

Como a reconhecemos? Várias hipóteses...

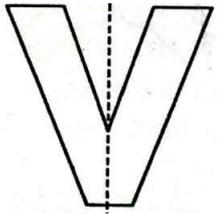
- Se conseguirmos dobrar a figura de tal modo que as duas partes obtidas se sobreponham exactamente;
- Se conseguirmos colocar um espelho ou mira sobre a figura de modo a que a junção da parte reflectida com a não reflectida seja exactamente igual à figura toda;
- Se recortarmos a figura e conseguirmos preencher exactamente o buraco que fica na folha com a parte recortada mas virada ao contrário (com a parte de baixo do papel virada para cima);
- ...



# Simetria de reflexão de uma figura

- A simetria de reflexão também se designa por *simetria axial*; o eixo de reflexão também se designa por *eixo de simetria* ou *linha de simetria*. (Serra, 1993, p. 305)

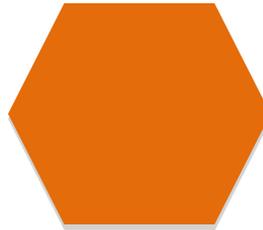
Eixo de simetria?



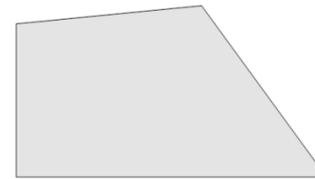
1 eixo de simetria



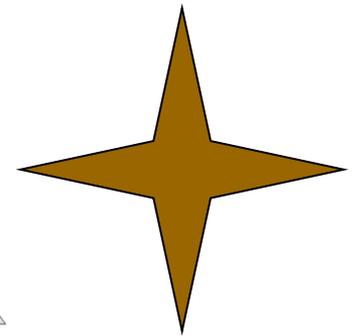
? eixos de simetria



? eixos de simetria



? eixos de simetria

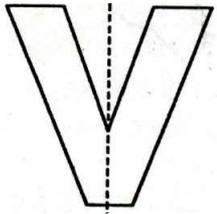


? eixos de simetria

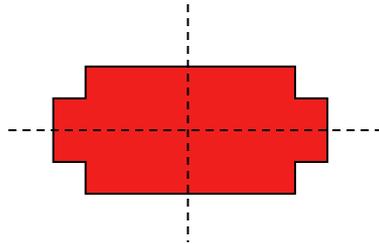
# Simetria de reflexão de uma figura

- A simetria de reflexão também se designa por *simetria axial*; o eixo de reflexão também se designa por *eixo de simetria* ou *linha de simetria*. (Serra, 1993, p. 305)

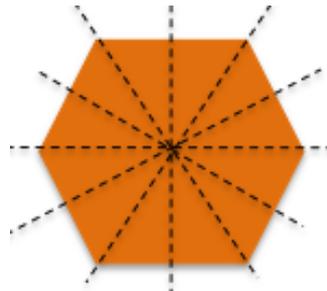
## Eixo de simetria?



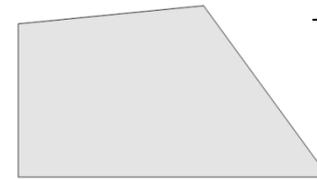
1 eixo de simetria



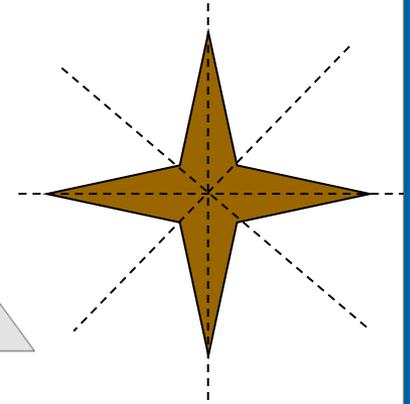
2 eixos de simetria



6 eixos de simetria

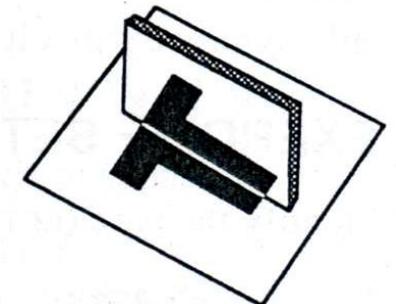


0 eixos de simetria



4 eixos de simetria

**Eixo de simetria de uma figura:** Recta (sobre a qual se faz a dobra ou se coloca o espelho/mira...) que divide a figura ao meio de modo que uma metade da figura seja a reflexão da outra metade. Caso contrário, a recta não é eixo de simetria.

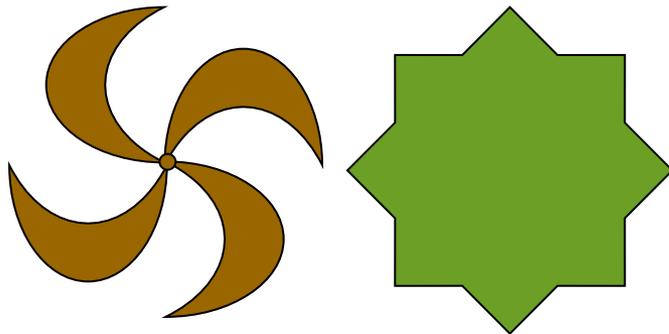


# Simetria rotacional de uma figura

Existe, pelo menos, uma rotação com uma amplitude superior a  $0^\circ$  e inferior a  $360^\circ$  que deixa a figura globalmente invariante. Só neste caso se admite também uma simetria rotacional associada a um ângulo de  $360^\circ$ .

## Como a reconhecemos?

Se conseguirmos girar a figura em torno de um ponto fixo, de modo a que a imagem resultante, através da rotação, coincida com a figura original.



Figuras *com* simetria rotacional

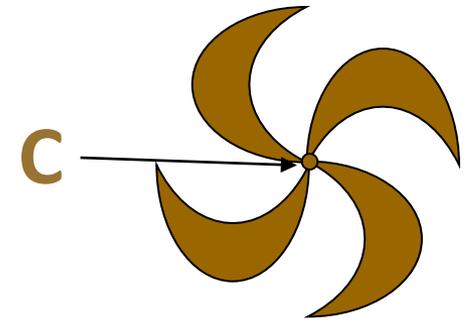


Figura *sem* simetria rotacional

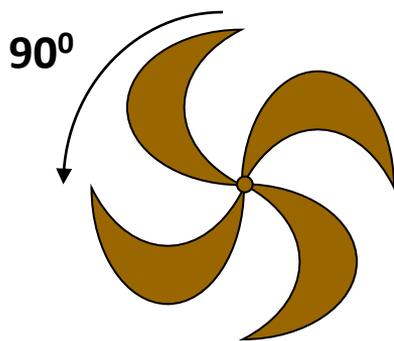
# Simetria rotacional de uma figura

Que simetrias rotacionais tem a figura?

**C:** Centro da simetria rotacional (ponto em torno do qual a figura “roda”)

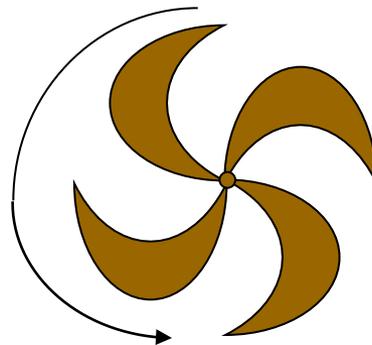


**Ângulo da simetria rotacional:** ângulo orientado que descreve o “movimento” da figura.

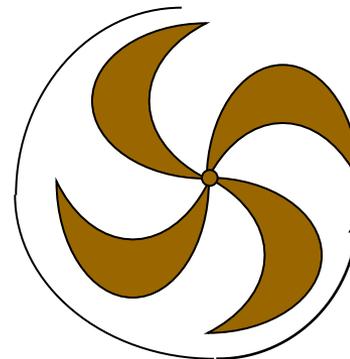


Um quarto de volta

180°



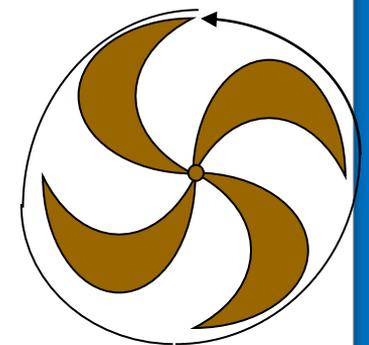
Meia volta



270°

três quartos de volta

360°



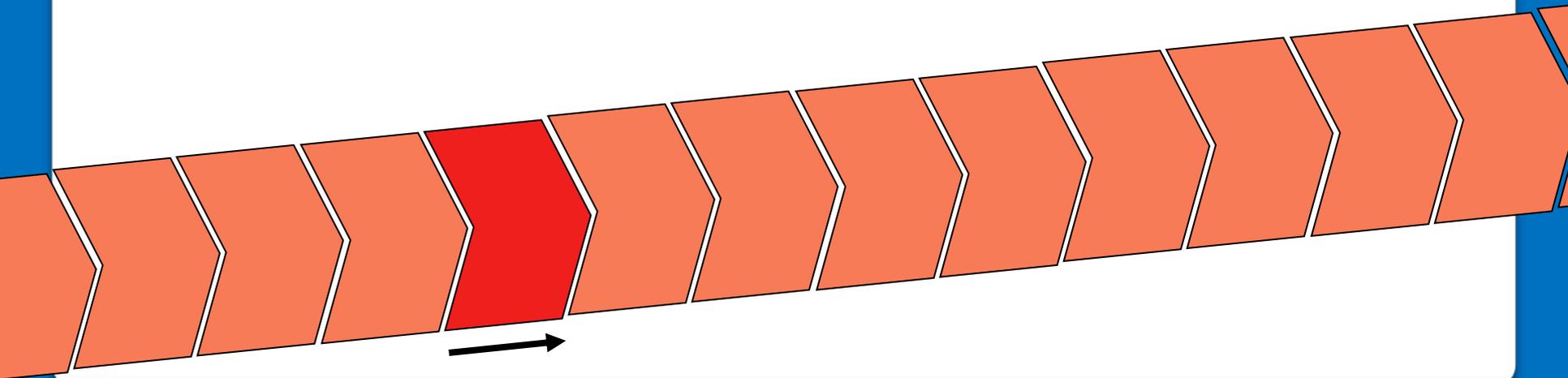
uma volta inteira

# Simetria de translação de uma figura

Existe, pelo menos, uma translação que deixa a figura globalmente invariante

Como a reconhecemos?

- Se podemos movimentar a figura segundo uma dada distância e uma dada direcção (identificadas pelo vector da translação) de tal modo que o seu transformado coincide com a figura original
- Se a figura for infinita, existe essa possibilidade...

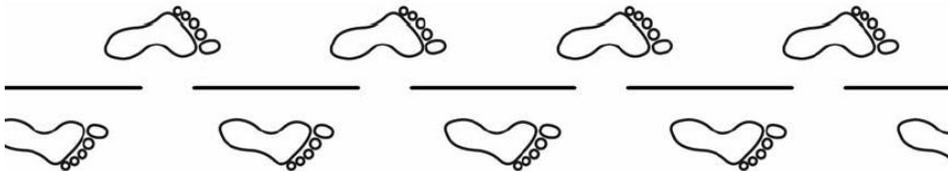


# Simetria de reflexão deslizante de uma figura

Existe, pelo menos, uma reflexão deslizante que deixa a figura globalmente invariante

Como a reconhecemos?

- Se, por exemplo, depois de desenharmos a figura em papel transparente, de virarmos o papel ao contrário “em torno” de uma determinada recta e de o deslocarmos um pouco segundo a direcção dessa recta, conseguirmos que o transformado da figura coincida com a figura original.
- Se a figura for infinita, existe essa possibilidade...



# Em busca de simetrias de figuras

## Potencialidades

*O estudo das simetrias das figuras constitui uma aplicação muito interessante das isometrias que permite desenvolver o conhecimento matemático destas transformações geométricas e fornecer, conseqüentemente, ferramentas que podem ser muito úteis na resolução de problemas geométricos.*

*(...)*

*O conceito de simetria pode ser também a base para actividades de descrição e classificação de figuras geométricas, de argumentação/demonstração*

*(...)*

*A análise de objectos artísticos ou de cristais através das suas simetrias são actividades que estabelecem ligações entre a matemática e outros domínios do saber (...)*

(Bastos, 2006, p. 11)

# Bibliografia e outros materiais consultados

## Documentos não publicados

Conjunto de slides sobre *Simetrias de uma figura e isometrias no plano* elaborados por Ana Maria Boavida, Fernanda Matias, Margarida Rodrigues e Sílvia Machado para a *Formação de Professores Acompanhantes do PMEB: Geometria* promovida pela DGIDC (Setembro 2009) e respectiva adaptação pela equipa do *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos* da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal(2009/2010) .

Conjunto de slides sobre *Simetria e frisos* elaborados pela equipa do *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos* da Universidade de Évora (2008/2009).

*Transformações geométricas e simetrias de uma figura* (texto produzido pelas equipas do *Programa de Formação Contínua em Matemática para professores dos 1º e 2º ciclos* da ESE de Setúbal).

## Sites

[http://www.apm.pt/formacao/tgs\\_2008/index.html](http://www.apm.pt/formacao/tgs_2008/index.html)

<http://www.atm.org.uk/resources/>

<http://www.atractor.pt/simetria/matematica/index.html>

<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=168>

[http://mathstitch.com/Rosettes\\_Friezes\\_and\\_Wallp.html](http://mathstitch.com/Rosettes_Friezes_and_Wallp.html)

**Continua ...**

# Proposta de trabalho

Analise as tarefas apresentadas em seguida e discuta as suas potencialidades para trabalhar aspectos referentes às isometrias ou simetrias de uma figura ao longo de cada um dos ciclos do ensino básico, tendo em conta o novo programa de Matemática. Em particular, discuta possíveis adaptações a cada um dos ciclos, objectivos visados e materiais a disponibilizar.